ANÁLISIS II: TAREA 1

Cuando corresponda, prueba lo indicado. El conjunto M siempre es un espacio métrico.

1. Un conjunto $K \subset M$ es compacto si, y solo si, es compacto en M.

2. Sea $A \subset M$. Si A es conexo y $A \subset B \subset \overline{A}$, entonces B también lo es.

3. Si $V \subset \mathbb{R}$ es abierto, entonces V se puede expresar como una unión numerable de intervalos abiertos disjuntos.

4. Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ y $f : [a, b] \to [a, b]$. Si f es continua, entonces f tiene un punto fijo, esto es, existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = c$. (Sug.: trata de usar el teorema del valor intermedio con una función auxiliar.)

5. Si $f : [1, \infty) \to (1, \infty)$ es una biyección, entonces f no es continua.

6. Prueba la fórmula para el límite de un producto de funciones.

Definición Una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es *continua por pedazos*, si existe una partición $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ de $[a, b]$ respecto a la cual se cumplen las siguientes dos propiedades: a) f es continua en cada $x \in [a, b] \setminus P$. b) En cada $x = x_k,\ k = 0, \ldots, n$, existen los límites laterales.

7. Señala un función $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continua por pedazos y discontinua.

Los siguientes conceptos para funciones corresponden a los que ya conocemos para sucesiones.

Definición Sea $D \subset \mathbb{R},\ f : D \to \mathbb{R}$ y $x, y \in D$. La función f es:
a) *Monótona-creciente*, si $x < y$ implica que $f(x) \leq f(y)$.
b) *Monótona-decreciente*, si $x < y$ implica que $f(x) \geq f(y)$.
c) *Monótona*, si f es monótona-creciente o monótona-decreciente.
8. Sean $a, b \in \mathbb{R}^*,\ a < b,\ f : (a, b) \to \mathbb{R}$ y $p \in I$. Si f es monótona-creciente, entonces:
i) $f(p^-) = \sup\{f(x) : a < x < p\}$ y $f(p^+) = \text{ínf}\{f(x) : p < x < b\}$.
ii) $f(x^+) \leq f(p^-) \leq f(p) \leq f(p^+)) \leq f(y_)$ si $a < x < p < y < b$.
iii) ¿Qué pasa cuándo f es monótona-decreciente?

9. Definamos $f(x) := \begin{cases} 2x + 1, & x \leq 0 \\ x^2 + bx + c, & 0 < x \end{cases}$. Encuentra b y $c \in \mathbb{R}$ para que f sea derivable.

10. Sean $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, $a < p < b$ y supongamos que f es derivable en p.
i) Si $f(p) \neq 0$, encuentra $|f|'(p)$.
ii) ¿Qué sucede si $f(p) = 0$?

Definición Sean V y W espacios vectoriales. A una biyección $T : V \to W$ que sea lineal, la llamaremos *isomorfismo* (de V en W).

11. Sean V y W espacios vectoriales. Si $T : V \to W$ es un isomorfismo, entonces su función inversa $T^{-1} : W \to V$ es lineal.

Para revisar y entregarse el viernes 10 de febrero, 2017.