ANÁLISIS II: TAREA 2

Cuando corresponda, prueba lo indicado. El conjunto M siempre es un espacio métrico.

1. Si $A \subset M$ es tal que para cada $x, y \in A$ existe un conjunto conexo $C_{x,y} \subset A$ tal que $x, y \in C_{x,y}$, entonces A es conexo.

2. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua y acotada, entonces f tiene un punto fijo.

3. Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tales que $a < b,\ c < d$ y $h : [a, b] \to [c, d]$ una biyección. Si h es continua, entonces h es creciente o decreciente. (Sug.: Dependiendo de la relación entre $h(a)$ y $h(b)$ establece que h es creciente o decreciente.)

4. Sean I un intervalo y $f : I \to \mathbb{R}$. Si f es monótona y $f(I)$ es un intervalo, entonces f es continua. (Sug.: ten presente que $f(p^-) \leq f(p) \leq f(p^+)$ cuando f es monótona-creciente y $f(p^+) \leq f(p) \leq f(p^-)$ en el otro caso.)

5. Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función continua por pedazos, entonces f es acotada. (Sug.: ¿Es f localmente acotada?)

6. Sea A un conjunto arbitrario Supongamos que existe una biyección $h : A \to M$, donde M es un espacio métrico, y definamos $\tilde{d} : A^2 \to \mathbb{R}$ por $\tilde{d}(x, y) := d(h(x), h(y)),\ \forall\, x, y \in A$. Entonces $\tilde{d}$ es una métrica.

7. Sean I un intervalo abierto, $f : I \to \mathbb{R}$ y $x \in I$. Supongamos que $\{a_n\}, \{b_n\} \subset I$ son tales que $a_n < x < b_n,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$, y $\lim_{n\to\infty} a_n = x = \lim_{n\to\infty} b_n$. Si f es derivable en x, prueba que $f'(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n}$.

8. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua. Si f es derivable en (a, b), $f' \geq 0$ en (a, b) y f tiene un número finito de puntos críticos, entonces f es creciente.

9. El polinomio $P(x) = x^3 - 6x - 40$ tiene una sola raíz positiva.

10. Sean $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ y $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua. Si f es derivable en (a, b) y existe $L = \lim_{x\to a^+} f'(x) \in \mathbb{R}$, prueba que $L = f'(a)$.

11. Si $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es un polinomio y $\operatorname{gr} P > 1$, entonces P no es uniformemente continuo.

Definición Sea V un espacio vectorial. Para cada $\lambda \in \mathbb{R}$ la *dilatación por* λ es la función $M_\lambda : V \to V$ definida por $M_\lambda(x) := \lambda x$.

12. Sea V un espacio vectorial. Si $\lambda \neq 0$, entonces $M_\lambda : V \to V$ es un isomorfismo.

Para revisar y entregarse el viernes 17 de febrero, 2017.