ANÁLISIS II: TAREA 3

Cuando corresponda, prueba lo indicado. El conjunto M siempre es un espacio métrico.

1. Sea $A_\alpha \subset M, \forall\, \alpha \in J$, donde $J \neq \phi$. Si cada A_α es conexo y $A_\alpha \cap A_\beta \neq \phi,\ \forall\, \alpha, \beta \in I$, entonces $\bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha$ es conexo.

2. Determina cuántas funciones *continuas* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfacen que $[f(x)]^2 = x^2,\ \forall\, x \in \mathbb{R}$.

3. Sean I un intervalo y $f : I \to \mathbb{R}$ una función continua. Si f es inyectiva, observa que $J := f(I)$ es un intervalo y prueba que $f^{-1} : J \to I$ es continua.

4. Fijemos $a > 0$ y consideremos la función $h : [a, \infty] \to [0, \frac{1}{a}]$ definida por $h(x) := \frac{1}{x}$ si $a \leq x < \infty$ y $h(\infty) := 0$.

i) Observa que h es una biyección y considera en $[a, \infty]$ la métrica $\tilde{d}$ definida a través de h, de acuerdo a lo señalado en el ejercicio 2.6.

ii) Si $r > 0$ indica cómo son las bolas $V_r(x)$ correspondientes a $\tilde{d}$, cuando $a \leq x < \infty$ o $x = \infty$

5. Sea P el polinomio definido por $P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n, \forall\, x \in \mathbb{R}$. Si $a_0 a_n < 0$, prueba que P tiene al menos una raíz real.

6. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función derivable. Si $f'(a) < c < f'(b)$, prueba que existe $x_0 \in (a, b)$ tal que $f'(x_0) = c$. (Sug. considera la función auxiliar $g(x) = f(x) - cx$ y analiza lo que sucede donde f toma su valor mínimo.)

7. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función derivable tal que $f' = f$ y $f(0) = 1$, prueba que $f(x) = e^x,\ \forall\, x \in \mathbb{R}$.

8. $\lim_{x \to \infty} \frac{P(x)}{e^x} = 0$, para cualquier polinomio P.

9. Sea $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Encuentra los valores máximo y mínimo de la función $f(t) = t^2 - 2t \cos\theta + 1$ en el intervalo $[-1, 1]$.

10. Calcula $\lim_{x \to 0} \dfrac{x - \operatorname{sen} x}{x^3}$.

11. Consideremos una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ de radio de convergencia $R > 0$, y definamos $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Entonces $f : (-R, R) \to \mathbb{R}$ es derivable. (Véanse los ejercicios 11.9, 13.3 y 14.9 del semestre pasado.)

Para revisar y entregarse el viernes 24 de febrero, 2017.