ANÁLISIS II: TAREA 4

Cuando corresponda, prueba lo indicado. El conjunto M siempre es un espacio métrico.

1. Sea I un intervalo. El conjunto de discontinuidades de una función monótona $f : I \to \mathbb{R}$ es numerable.

2. Dado $a > 0$ sea $M := [a, \infty]$ el espacio métrico definido en el ejercicio 3.4 y $D := [a, \infty)$. Entonces:
i) $\infty \in D^a$.
ii) La definición de $\lim_{x\to\infty} f(x)$, para $f : D \to \mathbb{R}$, en el espacio métrico M coincide con la definición "directa" dada con anterioridad en clase.

3. Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones derivables tales que $f' = g,\ g' = -f$ y $f(0) = 1, g(0) = 0$. Prueba que $f = \operatorname{sen}$ y $g = \cos$. (Sug.: considera la función $h(x) := (f(x) - \operatorname{sen} x)^2 + (g(x) - \cos x)^2,\ \forall\, x \in \mathbb{R}$. Nota que esto implica que la definición presentada para las funciones coseno y seno coincide con la definición usual de Cálculo.)

4. Prueba que $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ y $\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 1$.

5. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos $f_n(x) := \begin{cases} x^n \operatorname{sen}\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$. Encuentra $n \in \mathbb{N}$ tal que f_n es derivable y ${f_n}'$ no es continua.

6. $\ln(1 + x) = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + ...$, si $|x| < 1$. (Sug.: analiza la serie de potencias $1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + ...$)

7. $e^{xy} = (e^x)^y,\ \forall\, x, y \in \mathbb{R}$.

8. Si $f_p(x) := x^p,\ x \geq 0$, determina para qué valores de $p > 0$ existe ${f_p}'(0)$.

9. Sean I un intervalo, $n \in \mathbb{N}$, $f, g : I \to \mathbb{R}$ y $p \in I$. Si f y g son derivables n veces en p, entonces el producto fg también lo es y que se cumple la *fórmula de Leibniz*: $(fg)^{(n)}(p) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(p) g^{(n-k)}(p),\ \ (f^{(0)} = f)$.

10. Sean I y J intervalos, y $f : I \to J,\ g : J \to \mathbb{R}$. Si f y g son funciones convexas y g es monótona creciente, prueba que $g \circ f$ es convexa.

11. Prueba que $\dfrac{2}{\pi} < \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$, $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$. (Sug.: considera la concavidad de $f(x) = \operatorname{sen} x$.)

Para revisar y entregarse el viernes 3 de marzo, 2017.