ANÁLISIS II: TAREA 5

Cuando corresponda, prueba lo indicado. En cualquier caso I es un intervalo, V un espacio vectorial y M un espacio métrico.

1. Si $a > 0$, entonces $\lim_{x\to\infty} \frac{P(x)}{e^{ax}} = 0$, para cualquier polinomio P.

2. Si $a \in \mathbb{R}$ y $\operatorname{sen} a = 0$, entonces $a = n\pi$ para algún $n \in \mathbb{Z}$.

3. $\pi > 3$. (Sug.: Sea $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función continua definida como $h(x) := \frac{\operatorname{sen} x}{x}$, si $x \neq 0$. Nota que h es una serie de potencias y la suma parcial de sus primeros cuatro sumandos da lugar al polinomio $S(x) := 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!}$. Prueba:

i) S es decreciente en $[0, 3]$ y $S(x) > 0, \forall\, x \in [0, 3]$.

ii) $\operatorname{sen} x > 0$ si $0 < x \leq 3$.)

4-5. i) $\ln(xy) = \ln x + \ln y,\ \forall\, x, y > 0$.

ii) Sea $p \in \mathbb{R}$. Entonces $(xy)^p = x^p y^p,\ \forall\, x, y > 0$.

iii) Sea $x > 0$. Entonces $x^{p+r} = x^p x^r,\ \forall\, p, r \in \mathbb{R}$.

iv) Sea $p \in \mathbb{R}$. Entonces $(x + y)^p = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\begin{array}{c} p \\ k \end{array} \right) x^{p-k} y^k$, si $|y| < x$.

6. Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$. Si f y g son de clase C^n, entonces $g \circ f$ también lo es.

7-8. Sean $f : I \to \mathbb{R}$ una función n veces derivable y $x_0 \in I^0$.

i) Si $f^{(n)}$ es continua en x_0, entonces su polinomio de Taylor $P := P_{x_0,n}$ cumple que $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-P(x_0+h)}{h^n} = 0$.

ii) Si Q es otro polinomio de grado menor o igual que n que satisface la condición en i), entonces $Q = P$.

9. Sea $V \neq \{0\}$ un espacio vectorial de dimensión finita y $\{v_1, \cdots, v_m\}$ una base suya. Dado $j = 1, \cdots, m$, definamos $\varphi_j(\sum_{k=1}^{\infty} a_k v_k) := a_j$.

Observa que $\varphi_j : V \to \mathbb{R}$ está bien definida y verifica que es lineal.

Definición Una *combinación convexa* de $v_1, \ldots, v_m \in \mathbb{R}^n$ es una de la forma $t_1 v_1 + \cdots + t_m v_m$, donde $t_1, \ldots, t_m \geq 0$ y $t_1 + \cdots + t_m = 1$.

10. Si $K \subset V$ es convexo y $v_1, \ldots, v_m \in K$, entonces cualquiera de sus combinaciones convexas también pertenece a K.

Definición La *distancia de un punto* $x \in M$ *a un conjunto* $A \subset M$ es $d_A(x) := \text{ínf}\{d(x,a) : a \in A\}$, donde $\text{ínf}\,\phi := \infty$.

11. Supongamos que $A \neq \phi$ y $x \in M$. Entonces:

i) $0 \leq d_A(x)) < \infty$.

ii) Si $r < d_A(x)$, entonces $V_r(x) \bigcap A = \phi$.

iii) Si $r > d_A(x)$, entonces $V_r(x) \bigcap A \neq \phi$.

Para resolver y entregarse el viernes 10 de marzo, 2017.
El primer examen parcial será el martes 14 de marzo, 16 hrs.
No olviden traer sus hojas para el examen.