ANÁLISIS II: TAREA 6

Cuando corresponda, prueba lo indicado. El conjunto M siempre es un espacio métrico.

Definición Una *curva* en un espacio métrico M es una función continua $\alpha : [a, b] \to M$, donde $a, b \in \mathbb{R}$ y $a < b$. Su *trayectoria* es el conjunto $\alpha^* := \{\alpha(t) : a \leq t \leq b\}$.

1. La trayectoria de una curva en M es un conjunto compacto y conexo.

2. Sea $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ una serie de potencias con radio de convergencia $R > 0$ y definamos $f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n, |x| < R$. Entonces $a_n = \frac{f^(n)(0)}{n!}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

3. ¿Cuál número es mayor, e^π o π^e?

4. Si $p > 0$, entonces $\lim_{x\to 0^+} x^p \ln x = 0$.

5. i) Sea $p \geq 1$. Si $a_1, a_2 \geq 0$, entonces $(a_1 + a_2)^p \leq 2^p(a_1^p + a_2^p)$.
ii) Determina una desigualdad correspondiente para $(a_1 + \cdots + a_n)^p$, si $n \geq 3$.

6. Prueba las propiedades del producto escalar en $\mathbb{R}^n$ indicadas en clase.

7. La norma euclidiana cumple la ley del paralelogramo:
$$\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2(\|v\|^2 + \|w\|^2),\ v, w \in \mathbb{R}^n.$$

8. Si $a_1, \ldots, a_n > 0$ prueba que $n^2 \leq (a_1 + \cdots a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \cdots\ \frac{1}{a_n}\right)$.

9. Encuentra el valor mínimo de la función
$$f(x) := \sqrt{(x-1)^2 + 9}\ +\ \sqrt{(x-8)^2 + 16},\ \forall\, x \in \mathbb{R}.$$
(Sug.: interpreta la función geométricamente.)

10. Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$. Entonces $\|x - ky\| \geq \|x\|$, $\forall\, k \in \mathbb{R}$, si, y sólo si, $\langle x, y\rangle = 0$.

Definición Dado $x := (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, definamos $\|x\|_1 := \sum_{k=1}^{n} |a_n|$.

11. Verifica que $\|\cdot\|_1$ es una norma en $\mathbb{R}^n$.

Para resolver y entregarse el viernes 17 de marzo, 2017.
El primer examen parcial será el martes 14 de marzo, 16 hrs.
No olviden traer sus hojas para el examen.