ANÁLISIS II: TAREA 7

Cuando corresponda, prueba lo indicado. En cualquier caso, M es un espacio métrico y V un espacio vectorial.

Definición Un conjunto $A \subset M$ es *arco-conexo*, si para cualesquiera puntos $x, y \in M$ existe una curva $\alpha : [0,1] \to M$ tal que $\alpha(0) = x$ y $\alpha(1) = y$.

1. Un conjunto arco-conexo es conexo.

2. Calcula $\lim_{r\to 0} \dfrac{r}{\ln(1+r)}$.

3. i) Sea $p \geq 1$. Si $a_1, a_2 \geq 0$, entonces $(a_1 + a_2)^p \leq 2^{p-1}({a_1}^p + {a_2}^p)$.

ii) Determina una desigualdad para $(a_1 + \cdots + a_n)^p$, cuando $n \geq 3$.

4. Definamos $f(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$.

i) Verifica que f es de clase C^∞.

ii) Determina si f se representa alrededor de 0 por su serie de Taylor.

Definición Sea V un espacio vectorial y $p \in V$. *La traslación por* p es la función $T_p : V \to V$ tal que $T_p(x) := x + p$.

5. Para cada $p \in V$, la traslación $T_p : V \to V$ es una biyección.

Definición Sea $K \subset V$ un conjunto convexo. Una función $f : K \to \mathbb{R}$ es *convexa*, si cuando $a, b \in I$ se cumple que $f((1-t)a + tb) \leq (1-t)f(a) + tf(b)$, $\forall\, t \in [0,1]$.

6. Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo y $f : K \to \mathbb{R}$. Prueba que f es una función convexa si, y sólo si, $A := \{(x,y) : x \in K,\ f(x) \leq y\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ es un conjunto convexo.

7. Sean $x, y \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$.Entonces $\|x + y\|_2 = \|x\|_2 + \|y\|_2$ si, y sólo si, $y = kx$, donde $k \geq 0$.

8. Determina si la norma $\|\cdot\|_\infty$ en $\mathbb{R}^2$ satisface la ley del paralelogramo.

9. Bosqueja el conjunto $S(r) := \{u \in \mathbb{R}^2 : \|u\|_1 = r\},\ r > 0$.

Definición Sea X un espacio vectorial. Dos normas en X, $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|_0$, son *equivalentes*, si existen $C,\ K > 0$ tales que $C\|x\|_0 \leq \|x\| \leq \|x\|_0,\ \forall\, x \in X$.

10. Determina si las normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ son normas equivalentes en $\mathbb{R}^n$.

11. Toda sucesión de Cauchy en M es acotada.

12. Si $A \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto infinito y acotado, entonces A^a es no-vacío.

Para revisar y entregarse el viernes 24 de marzo, 2017.