ANÁLISIS II: TAREA 8

Cuando corresponda, prueba lo indicado. En cualquier caso, X es un espacio normado y M un espacio métrico.

1. El espacio métrico $[a, \infty]$ definido en el ejercicio 3.4 es compacto.

2. $\lim_{x \to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$. (Nota que esto generaliza que $\lim(1+\frac{1}{n})^n = e$).

3. Si $p \geq 1$ y $a_1, \ldots, a_n \geq 0$, entonces $\left(\sum_{j=1}^n a_j\right)^p \geq \sum_{j=1}^n a_j^p$.
iii) ¿ Qué forma toma la desigualdad anterior cuando $0 < p < 1$?

4. Si $A \subset \mathbb{R}^m$ y $B \subset \mathbb{R}^n$ son acotados, entonces $A \times B \subset \mathbb{R}^{m+n}$ también lo es.

5. Si $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una transformación lineal, entonces existe un único vector $u \in \mathbb{R}^n$ tal que $\varphi(x) = \langle x, u \rangle,\ \forall\, x \in \mathbb{R}^n$.

Notación Denotaremos por $\mathcal{M}(m \times n)$ el espacio vectorial de las matrices (reales) de tamaño $m \times n$. Identificándolo con $\mathbb{R}^{mn}$, consideraremos en $\mathcal{M}(m \times n)$ la norma euclidiana correspondiente. Además, $\mathcal{M}(n) := \mathcal{M}(n \times n)$.

6. Sean $A \in \mathcal{M}(m \times n)$, $B \in \mathcal{M}(n \times k)$ y $x \in \mathbb{R}^n (= \mathcal{M}(n \times 1))$. Entonces:
i) $\|Ax\| \leq \|A\| \|x\|$.
ii) $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$.
iii) Si $n = m$ y $j \in \mathbb{N}$, entonces $\|A^j\| \leq \|A\|^j$.

7. Si $K \subset X$ es un conjunto convexo, entonces K es conexo.

8. Si $\|\cdot\|$ y $\|\cdot_0\|$ son normas equivalentes en X, entonces tienen las mismas sucesiones convergentes.

9. Si V es un subespacio vectorial de X y $V \neq X$, entonces $V^0 = \phi$.

Definición Dados $x, y \in \ell^2$, definamos $\langle x, y \rangle := \sum_{n=1}^{\infty} x(n) y(n)$.
10. La función $\langle \cdot, \cdot \rangle : \ell^2 \times \ell^2 \to \mathbb{R}$ está bien definida y tiene las propiedades básicas del producto escalar en $\mathbb{R}^n$.

11. Sea D un conjunto y $n \in \mathbb{N}$.
i) Si D tiene n elementos, entonces $\dim B(D) = n$.
ii) Si D es un conjunto infinito, entonces $\dim B(D) = \infty$.

12. Si $\{x_k\} \subset X$ y $\{\lambda_k\} \subset \mathbb{R}$ son sucesiones convergentes, entonces $\lim_{k \to \infty} \lambda_k x_k = \lim_{k \to \infty} \lambda_k \lim_{k \to \infty} x_k$.

Para revisar y entregarse el viernes 7 de abril.