ANÁLISIS II: TAREA 9

Cuando corresponda, prueba lo indicado. En cualquier caso, X es un espacio normado.

1. Sean $A := \{(x, \operatorname{sen}\frac{1}{x}) : 0 < x \leq 1\}$, $B := \{0\}\times[0,1]$. Entonces $C := A \cup B$ es conexo.

2. Sean V un espacio vectorial y $K \subset V$ un conjunto convexo. Si $f : K \to \mathbb{R}$, es una función convexa y $x_1, \ldots, x_n \in K$, entonces $f(t_1x_1 + \cdots + t_nx_n) \leq t_1f(x_1) + \cdots + t_nf(x_n)$ siempre que $t_1, \cdots, t_n \geq 0$ y $t_1 + \cdots + t_n = 1$.

Definición El *complemento ortogonal* de $B \subset \mathbb{R}^n$ es el conjunto

$$B^{\perp} := \{x \in \mathbb{R}^n : \langle a, x\rangle = 0,\ \forall\, a \in B\}.$$

3. Prueba que $B^{\perp}$ es un subespacio vectorial, $\forall\, B \subset \mathbb{R}^n$.

Definición Sea X un espacio vectorial. Una *seminorma* en X es una función $\|\cdot\| : X \to [0, \infty)$ con las propiedades de una norma, excepto que para algún $x \neq 0$ puede ocurrir que $\|x\| = 0$.

4. Sean X un espacio vectorial, Y un espacio normado y $T : X \to Y$ un operador lineal.

i)La función $\|x\|_T := \|Tx\|_Y$ define una seminorma en X.

ii) ¿Cuándo es una norma?

5. La desigualdad de Schwarz es válida en ℓ_2.

6. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ la función $f_n(x) := (1 - x^2)^n$. Determina si la sucesión $\{f_n\}$ es convergente en $B([0,1])$.

7. Motivado por la norma $\|\cdot\|_1$ en $\mathbb{R}^n$ define el espacio de sucesiones ℓ_1. Justifica tu respuesta.

8. Sea $\{x_n\} \subset X$. Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge, entonces $x_n \to 0$.

9. En el teorema sobre las operaciones con límites prueba el caso del producto escalar cuando $X = \mathbb{R}^n$.

10. Prueba el criterio por componentes para la existencia del límite de una función con valores en $\mathbb{R}^n$.

11. Determina para qué valores de $r > 0$ existe $\lim_{(x,y)\to 0} \dfrac{xy}{(x^2 + y^2)^r}$.

12. La función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = \max\{x, y\}$ es de Lipschitz.

Para revisar y entregarse el miércoles 26 de abril, 2017.