ANÁLISIS II: TAREA 10

Cuando corresponda, prueba lo indicado. En cualquier caso, M es un espacio métrico y X un espacio normado.

1. Sea $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$. Si $f(0) = 0$ y f es convexa, entonces:

i) f es continua en 0.

ii) $f(a) + f(b) \leq f(a + b)$, $\forall\, a, b \geq 0$. Concluye que f es monótona-creciente. (Sug.: considera $0 < a \leq b$ y expresa a, b, respectivamente, como combinación convexa de 0 y de $a + b$.)

2. Sean $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto numerable, $b \in \mathbb{R}$ y supongamos que $H := \{(x_1, \ldots, x_n) : x_1 = b\} \subset A^c$. Prueba que, para cada $p \in A^c$ existe $q \in H$ tal que el segmento S de extremos p y q está contenido en A^c.

3. Sea $V \subset \mathbb{R}^n$ un subespacio vectorial, $V \neq \{0\}$. Fijemos una base ortonormal $\{v_1, \ldots, v_m\}$ de V. Dado $x \in \mathbb{R}^n$, sea $Px := \sum_{j=1}^{m} \langle x, v_j \rangle v_j$. Prueba:

i) $x - Px \in V^{\perp}$.

ii) $\mathbb{R}^n = V \oplus V^{\perp}$.

4. Si $A \subset \mathbb{R}^m$ y $B \subset \mathbb{R}^n$ son abiertos, entonces $A \times B \subset \mathbb{R}^{m+n}$ es abierto.

5. Dado $a \in \mathbb{R}$, definamos $d : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ por $d(\alpha) := \|e^{i(a+\alpha)} - e^{ia}\|$, donde $e^{ix} := (\cos x, \operatorname{sen} x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. Prueba que d es creciente en $[0, \pi]$ y decreciente en $[\pi, 2\pi]$.

6. Sea $D \neq \phi$ y consideremos $f : D \to \mathbb{R}^n$, $f := (f_1, \ldots, f_n)$ y $f_m : D \to \mathbb{R}^n$, $f_m := (f_{m,1}, \ldots, f_{m,n})$, $\forall\, m \in \mathbb{N}$. Prueba que $f_m \xrightarrow{u} f$ si, y sólo si, $f_{m,k} \xrightarrow{u} f_k$ para cada $k = 1, \ldots, n$.

Definición La *gráfica* de una función $f : A \to B$ es

$$G(f) := \{(x, f(x)) : x \in A\} \subset A \times B.$$

7. Sean $E \subset \mathbb{R}^m$ y $f : E \to \mathbb{R}^n$. Si f es continua y E es cerrado, prueba que su gráfica $G(f) \subset \mathbb{R}^{n+m}$ es un conjunto cerrado.

8. Si $A \subset \mathbb{R}^n$, entonces el conjunto formado por sus puntos aislados es numerable.

9. Sean $V, W \subset M$. Si V y W son abiertos y densos, prueba que $V \cap W$ también lo es.

Notación Dados unos espacios normados X y Y, denotaremos por $\mathcal{L}(X,Y)$ el espacio formado por los operadores lineales acotados $T : X \to Y$. Definimos entonces $\|T\| := \sup\{\|Tx\| : \|x\| \leq 1\}, \forall\, T \in \mathcal{L}(X,Y)$.

10. Prueba que $\mathcal{L}(X,Y)$ es un espacio vectorial y $\|\cdot\|$ es una norma en $\mathcal{L}(X,Y)$.

11. Sean X y Y espacios normados y $T : X \to Y$ un operador lineal. Entonces T es una isometría si, y sólo si, $\|Tx\| = \|x\|,\ \forall\, x \in X$.

12. Las normas $\|\cdot\|_\infty$ y $\|\cdot\|_1$ no son equivalentes en $\mathcal{S}_0$.

Para resolver y entregarse el miércoles 3 de mayo, 2017.
El segundo examen parcial será el viernes 5 de mayo, 12:30 hrs.
No olviden traer sus hojas para el examen.