ANÁLISIS II: TAREA 11

Cuando corresponda, prueba lo indicado. En cualquier caso, M y E son espacios métricos.

1. Sean $1 < p < \infty$ y q tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Entonces $1 < q < \infty$ y $ab \leq \dfrac{1}{p}\, a^p + \dfrac{1}{q}\, b^q,\ a, b \geq 0$.

2. El conjunto conexo C indicado en el ejercicio 9.1 no es arco-conexo.

3. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$. Si A es no-numerable, entonces A^a es no-numerable.

4. Si $A \subset \mathbb{R}^m$ y $B \subset \mathbb{R}^n$ son compactos, entonces $A \times B \subset \mathbb{R}^{m+n}$ es compacto.

5. La *esfera unitaria* $S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$ es un conjunto compacto.

Definición Dados $w = (a, b), z = (c, d) \in \mathbb{R}^2$, definamos su *producto* como $wz := (ac - bd, ad + bc)$.

6. i) $e^{ix} \in S^1,\ \forall\, x \in \mathbb{R}$.
ii) $e^{i(x+y)} = e^{ix} e^{iy},\ \forall\, x, y \in \mathbb{R}$.

7. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Si su gráfica $G(f)$ es un conjunto cerrado y la función f es acotada, entonces f es continua.

8. Sea $A \subset M$. Prueba que A es abierto y cerrado si, y sólo si, $\mathrm{Fr} A = \phi$.

9. Sea D un conjunto no vacío y definamos $S : B(D) \to \mathbb{R}$ por $S(f) := \sup f$. Entonces $|Sf - Sg| \leq \|f - g\|_\infty$.

10. Determina si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, donde $x_n := \left(\dfrac{\cos n}{n^{\frac{3}{2}}}, \dfrac{\operatorname{sen} n}{n^2} \right),\ \forall\, n \in \mathbb{N}$, es convergente.

11. Si $j : M \to E$ es una isometría suprayectiva y E es completo, entonces M es completo.

12. Sea $n \in \mathbb{N}$. Si $a_1, \cdots, a_n \geq 0$, entonces $a_1 \cdots a_n \leq \left(\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}\right)^n$. (Sug.: Si $0 \leq a < b$, observa que $ab < (\frac{a+b}{2})^2$ y considera el conjunto de puntos $(x_1, \ldots, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tales que $x_1 + \cdots + x_n = a_1 + \cdots + a_n$.)

Para revisarse y entregar el miércoles 10 de mayo, 2017.