ANÁLISIS II: TAREA 12

Cuando corresponda, prueba lo indicado. En cualquier caso, M y E son espacios métricos y X es un espacio normado.

1. Si $w, z \in \mathbb{R}^2$, entonces $\|wz\|_2 = \|w\|_2\|z\|_2$.

2. Sea $f : M \to E$, Si f es uniformemente continua, entonces f preserva sucesiones de Cauchy.

3. Si $A \subset \mathbb{R}^m$ y $B \subset \mathbb{R}^n$ son conexos, entonces $A \times B \subset \mathbb{R}^{m+n}$ es conexo.

4. Sean A y B subconjuntos cerrados de M. Si $A^0 = B^0 = \phi$, entonces $(A \cup B)^0) = \phi$.

5. Sean $v, w, x \in M$. Si existen curvas en M que unen a v con w y a w con x, respectivamente, entonces existe una curva en M que une a v con x.

Definición Un espacio métrico M es *separable*, si tiene un subconjunto que es denso y numerable.

6. ℓ_∞ no es separable.

Notación El conjunto de valores propios de $A \in \mathcal{M}(n)$ se denotará por $\sigma(A)$.

7. Si $A \in \mathcal{M}(n)$, entonces $|\lambda| \leq \|A\|_{\mathrm{op}},\ \forall\, \lambda \in \sigma(A)$.

8. Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto no-vacío y compacto, y $F(x) := \max\{\langle x, a\rangle : a \in K\},\ \forall\, x \in \mathbb{R}^n$. Entonces F es continua.

9. Sea X un espacio de Banach y $\{x_m\}$ un sucesión en X. Tomemos $x_0 = 0$ y supongamos que $\sum_{m=1}^{\infty} \|x_m - x_{m-1}\| < \infty$. Entonces $\{x_m\}$ converge y $\|\lim_{m\to\infty} x_m\| \leq \sum_{m=1}^{\infty} \|x_m - x_{m-1}\|$.

10. Si $\dim X < \infty$, entonces X es completo.

Definición Un conjunto $A \subset M$ es *perfecto* si $A^a = A$.

11. El conjunto de Cantor es perfecto.

12. La relación "$\sim$" (definida en clase) es una relación de equivalencia en el conjunto de normas en un espacio vectorial X.

Para revisar y entregarse el miércoles 17 de mayo, 2017.