ANÁLISIS II: TAREA 13

Cuando corresponda, prueba lo indicado. En cualquier caso, M es un espacio métrico y X un espacio normado.

1. S^{n-1} es conexo.

2. Sean $f, g : M \to E$. Si $A \subset M$ es denso, f y g son continuas y $f = g$ en A, prueba que $f = g$.

3. Para cualquier $a \in \mathbb{R}$, la función $\alpha : [a, a+2\pi) \to \mathbb{C}$ definida por $\alpha(t) := e^{it}$ es una biyección sobre S^1.

Definición Sea V un espacio vectorial. El *soporte* de una función $f : M \to V$ es la cerradura del conjunto $\{x \in M : f(x) \neq 0\}$ y se denotará por sop$f$.

4. Sean $f, g : M \to X$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Si f y g tienen soporte compacto, entonces $f + g$ y λf también.

5. $\mathbb{R}^n$ no se puede expresar como unión finita de subespacios vectoriales de dimensión menor que n.

6. Una función continua entre espacios métricos puede no preservar sucesiones de Cauchy.

7. Sean X, Y y Z espacios normado. Si $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ y $S \in \mathcal{L}(Y, Z)$, entonces $ST \in \mathcal{L}(X, Z)$ y $\|TS\| \leq \|T\|\|S\|$.

8. (Criterio M de Weierstrass) Sean $D \neq \phi$, X un espacio de Banach y $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ una serie de funciones, $f_n : D \to X$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Supongamos que existen $N \in \mathbb{N}$ y una colección $\{M_n : n \geq N\} \subset [0, \infty)$ tales que se cumple $\|f_n(x)\| \leq M_n$, $\forall x \in D, \forall n \geq N$. Si la serie numérica $\sum_{n=N}^{\infty} M_n$ converge, entonces la serie de funciones $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente.

9. Si Y es un espacio de Banach, entonces $\mathcal{L}(X, Y)$ también lo es.

10. Determina el interior del conjunto de Cantor.

11. Si $f \in C([a, b])$, $f \geq 0$ y $\int_a^b f = 0$, entonces $f = 0$.

12. Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a < b$, $c < d$, y $R := [a, b] \times [c, d]$. Dada $K \in C(R)$, definamos $G(y) := \int_a^b K(s, y) ds$, $\forall y \in [c, d]$. Entonces G es continua.

Para revisar y entregarse el miércoles 24 de mayo, 2017.