ANÁLISIS II: TAREA 14

Cuando corresponda, prueba lo indicado. En cualquier caso, M es un espacio métrico y X un espacio normado.

1. Si $f : M \to X$ es continua y su soporte es compacto, entonces f es uniformemente continua.

2. El conjunto $GL(n) := \{A \in \mathcal{M}(n) : A \text{ es invertible}\}$ no es conexo.

3. Sea I la matriz identidad en $\mathcal{M}(n)$ y $A \in \mathcal{M}(n)$. Si $\|A\| < 1$, entonces $I + A \in GL(n)$.

4. i) Si $n, m \in \mathbb{N}$ y $n \neq m$, entonces $e^{ni} \neq e^{mi}$.

ii) Dado $\epsilon > 0$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $|e^{in} - 1| \leq \epsilon$. (Sug.: ten presente que S^1 es compacto.)

5. (Continuación del ejercicio 13.8) Si la serie numérica $\sum_{n=N}^{\infty} M_n$ converge y cada $f_n : M \to X$ es continua, entonces $f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ define una función continua.

6. Sea $A \in \mathcal{M}(n)$. i) La serie $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{A^m}{m!}$ converge.

ii) Definamos $e^A := \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A^m}{m!}$. Entonces $\|e^A\| \leq e^{\|A\|}$.

7. Determina si $\frac{1}{4}$ pertenece al conjunto de Cantor. (Sug.: $\frac{1}{4} = \frac{2}{3^2} + \frac{1}{4}\frac{1}{3^2}$.)

8. Motivado por la norma en ℓ_1 define una norma correspondiente en $C([a, b])$. Justifica tu respuesta.

Definición Una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es *escalonada*, si existe una partición $\mathcal{P} := \{x_0, \ldots, x_n\}$ de $[a, b]$ tal que f es constante en cada subintervalo (x_{k-1}, x_k).

9. Si $s : [a, b] \to \mathbb{R}$ es escalonada, entonces s es integrable.

Definición Dada una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ definamos $\tilde{f} : [-b, -a] \to \mathbb{R}$ por $\tilde{f}(x) := f(-x)$.

10. Si $f \in R([a, b])$, entonces $\tilde{f} \in R([-b, -a])$ y $\int_{-b}^{-a} \tilde{f} = \int_a^b f$.

11. Sea $K : [a,b]^2 \to \mathbb{R}$ una función continua. Dada $f \in C([a,b])$ definamos la función Tf por $Tf(x) := \int_a^b K(x,y)f(y)dy,\ \forall\, x \in [a,b]$. Entonces:

i) $Tf \in C([a,b])$

ii) $T : C([a,b]) \to C([a,b])$ es un operador lineal acotado.

12. $\lim \int_0^t (1-t^2)^n dt = 0$.

Para revisar y entregarse el lunes 29 de mayo, 2017.