ANÁLISIS II: TAREA 15

Cuando corresponda, prueba lo indicado. En cualquier caso, M y E son espacios métricos y X es un espacio normado.

Definición Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es *periódica*, si existe $p > 0$ tal que $f(x+p) = f(x),\ \forall\, x \in \mathbb{R}$. En este caso, a p se le llama un *periodo* de f.

1. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua y periódica, entonces f es uniformemente continua.

Definición Sea B un conjunto. Una función $f : M \to B$ es *localmente constante*, si para cada $x \in M$ existe $r > 0$ tal que f es constante en $V_r(x)$.

2. Sea $f : M \to B$ una función continua. Si f es localmente constante y M es conexo, entonces f es constante.

3. $GL(n)$ es denso en $\mathcal{M}(n)$. (Sug.: Dada $A \in \mathcal{M}(n)$ considera las matrices $A - \lambda I$.)

4. Si A y D son conjuntos con igual cardinalidad, encuentra un isomorfismo isométrico entre $B(A)$ y $B(D)$.

5. Sea D un conjunto no-vacío y consideremos sucesiones $\{f_n\}, \{g_n\} \subset B(D)$. Si $\{f_n\}$ y $\{g_n\}$ convergen en $B(D)$, prueba que $\{f_n g_n\}$ también.

6. Sean $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ funciones R-integrables. Si $g \geq 0$ y f es continua, prueba que existe $c \in [a,b]$ tal que $\int_a^b fg = f(c) \int_a^b g$.

7. Sean $a, b \in \mathbb{R},\ a < b$ y $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ R-integrable. Consideremos una sucesión $\{p_n\}$ tal que $a = p_0 < p_1 < \ldots < p_n < p_{n+1} < \ldots < b$ y $\lim_{n\to\infty} p_n = b$. Entonces:

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{p_{n-1}}^{p_n} f = \int_a^b f$.

ii) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{p_{n-1}}^{p_n} f$ converge absolutamente.

8. (Operador de Volterra) Denotemos por X el espacio normado que se obtiene al considerar $C[0,1]$ con la norma $\|\cdot\|_1$. Dada $f \in C[0,1]$, definamos $Tf : [0,1] \to \mathbb{R}$ por $Tf(x) := \int_0^x f(s)ds$. Prueba que $T : X \to X$ es un operador lineal acotado.

9. Sea $X := (C[0,1], \|\cdot\|_1)$. Prueba que el funcional evaluación $\varphi : X \to \mathbb{R}$ definido por $\varphi(f) := f(0)$ no es continuo.

10. Sea $f \in C[a,b]$. Si $\int_a^b f(x)x^n = 0,\ n = 0, 1, \ldots,$ entonces $f = 0$. (Sug.: verifica que la integral del producto de f con cualquier polinomio es 0 y utiliza el teorema de aproximación de Weierstrass para demostrar que $\int_a^b f^2 = 0$.)

Para revisar y entregarse el viernes 2 de junio, 2017.
El tercer examen parcial será el miércoles 7 de junio, 16 hrs.
No olviden traer sus hojas para el examen.