ANÁLISIS II: TAREA 1

En lo que sigue E es un espacio topológico, M es un espacio métrico y X un espacio normado. Prueba lo indicado.

1. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea χ_n la función característica del intervalo $(0, n)$. Encuentra $\chi(x) := \lim_{n\to\infty} \chi_n(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$ y determina si la convergencia es uniforme.

Definición La *función de Heaviside* es la función característica $\chi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ del intervalo $[0, \infty)$.
2. Construye una sucesión $\{f_n\}$ formada por funciones continuas $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y que converge puntualmente a la función de Heaviside.

Definición Una sucesión $\{x_n\} \subset M$ es *acotada*, si existen $a \in M$ y $R > 0$ tales que $d(x_n, a) \leq R,\ \forall n \in \mathbb{N}$.
3. Si $\{x_n\} \subset M$ es una sucesión convergente, entonces es acotada.

4. Si $\{x_n\} \subset M$ es una sucesión convergente, entonces es de Cauchy.

5. Sea $A \subset M$ un conjunto no-vacío dotado de la métrica inducida por M. Si M es completo, entonces A es completo si, y sólo si, A es cerrado en M.

Notación Dados $a \in M$ y $r \geq 0$, tomaremos $V_r(a) := \{x \in M : d(x, a) < r\}$ y $B_r(x) := \{x \in M : d(x, a) \leq r\}$.
Notación Si $A \subset E$, su cerradura se denotará por $\overline{A}$ y su interior por A^0.

6. Muestra que en un espacio métrico puede suceder que $\overline{V_r(x)} \subsetneq B_r(x)$.

7. Sea X un espacio normado. Si V es un subespacio vectorial de X y $V \neq X$, prueba que $V^0 = \phi$.

Definición Sea X un espacio vectorial. Una *seminorma* en X es una función $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ con las mismas propiedades de una norma, excepto que puede ocurrir que $\|x\| = 0$ y $x \neq 0$.

8. Sean X un espacio vectorial, Y un espacio normado y $T : X \to Y$ una función lineal.
i) La función $\|x\|_T := \|Tx\|_Y$ define una seminorma en X.
ii) ¿Cuándo es $\|\cdot\|_T$ una norma?

9. Sea $\lambda \in \mathbb{R}$. Si $\{f_n\}$, $\{g_n\} \subset F(D, X)$ son sucesiones que convergen uniformemente, entonces $\{f_n + g_n\}$ y $\{\lambda f_n\}$ también convergen uniformemente.

10. Señala sucesiones de funciones $\{f_n\}$ y $\{g_n\}$ tales que $f_n, g_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $\{f_n\}$ y $\{g_n\}$ convergen uniformemente y su producto $\{f_n g_n\}$ no.

11. Para cada $x > 0$ definamos $f(x) := \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1 + n^2 x}$. Entonces f está bien definida (es decir, la serie de funciones converge puntualmente) y es continua.

Para resolver y entregarse el miércoles 28 de enero, 2019