ANALISIS II: TAREA 2

A continuación D es un conjunto no-vacío, M un espacio métrico, V un espacio vectorial y X un espacio normado. Cuando corresponda, prueba lo indicado.

Definición Dado $x = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, definamos $\|x\|_1 := \sum_{k=1}^{n} |a_n|$.

1. Verifica que $\|\cdot\|_1$ es una norma en $\mathbb{R}^n$.

2. $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b},\ \forall\, a, b \geq 0$.

3. Sea $a \in \mathbb{R}$ tal que $|a| < 1$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, se cumple que $\sum_{n=1}^{\infty} n^k a^n$. converge absolutamente.

Definición Una sucesión $\{f_n\} \subset F(D, X)$ es *uniformemente acotada*, si existe un número $C > 0$ tal que $|f_n(x)| \ \leq C,\ \forall\, x \in D, \forall\, n \in \mathbb{N}$.

4. Sean $f \in F(D, X)$ y $\{f_n\} \subset F(D, X)$ una sucesión. Si cada f_n es acotada y $f_n \stackrel{u}{\to} f$, entonces f es acotada y $\{f_n\}$ es uniformemente acotada.

5. La función $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} nx}{n^3},\ x \in \mathbb{R}$, está bien definida y tiene derivada continua.

Definición Una *combinación convexa* de $v_1, \ldots, v_m \in V$ es una de la forma $t_1 v_1 + \cdots + t_m v_m$, donde $t_1, \ldots, t_m \geq 0$ y $t_1 + \cdots + t_m = 1$.

6. Si $K \subset V$ es un conjunto convexo y $v_1, \ldots, v_m \in K$, entonces cualquiera de sus combinaciones convexas también pertenece a K.

Definición Sean V y W espacios vectoriales. A una biyección $T : V \to W$ que sea lineal, la llamaremos *isomorfismo* (de V en W).

7. Sean V y W espacios vectoriales. Si $T : V \to W$ es un isomorfismo, entonces su función inversa $T^{-1} : W \to V$ es lineal.

8. La norma euclidiana cumple la ley del paralelogramo:

$$\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2(\|v\|^2 + \|w\|^2),\ \forall\, v, w \in \mathbb{R}^n.$$

9. Si $A \subset \mathbb{R}^m$ y $B \subset \mathbb{R}^n$ son acotados, entonces $A \times B \subset \mathbb{R}^{m+n}$ también lo es.

10. Si $A \subset \mathbb{R}$, entonces el conjunto de sus puntos aislados es numerable.

11. Supongamos que $K \subset U \subset M$. Si K es compacto y U es abierto, entonces existe $r > 0$ tal que $B_r(x) \subset U,\ \forall\, x \in K$.

Definición Una *curva* en un espacio métrico M es una función continua $\alpha : [a, b] \to M$, donde $a, b \in \mathbb{R}$ y $a < b$. Su *trayectoria* es el conjunto $\alpha^* := \{\alpha(t) : a \leq t \leq b\}$.

12. La trayectoria de una curva en M es un conjunto compacto y conexo.

Para resolver y entregarse el miércoles 6 de febrero, 2019.