ANÁLISIS II: TAREA 4

A continuación V es un espacio vectorial y E un espacio topológico. Cuando corresponda, prueba lo indicado.

Definición Sea V un espacio vectorial y $a \in V$. *La traslación por a* es la función $T_a : V \to V$ tal que $T_a(x) := x + a$.

1. Para cada $a \in V$, la traslación $T_a : V \to V$ es una biyección.

2. Sean $K \subset \mathbb{R}^n$ convexo y $f : K \to \mathbb{R}$. Entonces f es una función convexa si, y sólo si, $S := \{(x, y) : x \in K,\ f(x) \leq y\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ es un conjunto convexo.

3. La función ζ es de clase C^∞.

4. Si $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es un funcional lineal, entonces existe un único vector $u \in \mathbb{R}^n$ tal que $\varphi(x) = \langle x, u\rangle,\ \forall\, x \in \mathbb{R}^n$.

Definición Sean X y Y espacios normados. Un operador lineal $T : X \to Y$ es *acotado*, si existe un nuúmero real $C > 0$ tal que $\|Tx\| \leq C\|x\|,\ \forall\, x \in X$.

5. Si $T : X \to Y$ es acotado, prueba que T es continuo.

Notación Denotaremos por $\mathcal{M}(m\times n)$ el espacio vectorial de las matrices (reales) de tamaño $m\times n$. Identificándolo con $\mathbb{R}^{mn}$, consideraremos en $\mathcal{M}(m\times n)$ la norma euclidiana correspondiente. Además, $\mathcal{M}(n) := \mathcal{M}(n\times n)$.

6. Sean $A \in \mathcal{M}(m\times n)$, $B \in \mathcal{M}(n\times k)$ y $x \in \mathbb{R}^n (= \mathcal{M}(n\times 1))$. Entonces:
i) $\|Ax\| \leq \|A\|\|x\|$.
ii) $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$.
iii) Si $n = m$ y $j \in \mathbb{N}$, entonces $\|A^j\| \leq \|A\|^j$.

7. Si $A \subset \mathbb{R}^m$ y $B \subset \mathbb{R}^n$ son compactos, entonces $A\times B \subset \mathbb{R}^{m+n}$ es compacto.

8. Determina si la norma $\|\cdot\|_\infty$ en $\mathbb{R}^2$ satisface la ley del paralelogramo.

9. Si $A \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto infinito y acotado, entonces A^a es no-vacío.

10. $A \subset E$ es abierto y cerrado si, y sólo si, $\mathrm{Fr}A = \phi$.

11. Si U y W son abiertos y densos en E, entonces $U \cap W$ también lo es.

12. Sean $v, w, x \in E$. Si existen curvas en E que unen a v con w y a w con x, respectivamente, construye una curva en E que una v con x.

Para revisar y entregarse el miércoles 20 de febrero.