**ANÁLISIS II: TAREA 5**

Cuando no se indique otra cosa, $E$ es un espacio topológico, $M$ un espacio métrico, $V$ un espacio vectorial y $X$ un espacio normado. En cada caso, prueba lo indicado.

1. Sean $K \subset V$ un conjunto no-vacío, $f, f_n : K \to \mathbb{R}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Si $K$ es convexo, $f_n \to f$ y cada $f_n$ es convexa, determina si $f$ es convexa.

2. La continuidad uniforme se conserva bajo la convergencia uniforme. (Empieza por enunciar formalmente el resultado.)

**Definición** El *complemento ortogonal* de $B \subset \mathbb{R}^n$ es el conjunto

$$B^{\perp} := \{x \in \mathbb{R}^n : \langle a, x\rangle = 0,\ \forall\, a \in B\}.$$

3. El complemento ortogonal $B^{\perp}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$, $\forall\, B \subset \mathbb{R}^n$.

**Definición** La *gráfica* de una función $f : D \to B$ es

$$G(f) := \{(x, f(x)) : x \in D\} \subset D \times B.$$

4. Sean $D \subset \mathbb{R}^m$ y $f : D \to \mathbb{R}^n$. Si $f$ es continua y $D$ es cerrado, entonces su gráfica $G(f) \subset \mathbb{R}^{m+n}$ es un conjunto cerrado.

5. Sean $f, g : M \to E$. Si $f$ y $g$ son funciones continuas que coinciden en un subconjunto denso $D \subset M$, entonces $f = g$.

**Definición** Dado $n \in \mathbb{N}$, el conjunto $S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ es la *esfera $n$-dimensional*.

6. La esfera $S^n$ es un conjunto compacto y conexo.

7. Dados $x, y \in \ell^2$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x(n)y(n)$ converge absolutamente.

8. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ la función $f_n(x) = (1 - x^2)^n$. Determina si la sucesión $\{f_n\}$ es convergente en $B([0,1])$.

9. Motivado por la norma $\|\cdot\|_1$ en $\mathbb{R}^n$ define el espacio de sucesiones $\ell^1$ y propón una norma correspondiente. Justifica tu respuesta.

10. Sean $X$ y $Y$ espacios normados. Si $T : X \to Y$ es un operador lineal continuo, entonces $T$ es acotado.

11. Sea $X$ un espacio normado. Entonces $\overline{V_r(x)} = B_r(x), \ \forall\, x \in X$ y $r > 0$.

Para resolver y entregarse el miércoles 27 de febrero, 2019.
**El primer examen parcial será el jueves 28 de febrero, 3 pm.**
No olviden traer sus hojas para el examen.