ANÁLISIS II: TAREA 6

Cuando no se indique otra cosa, E es un espacio topológico y X un espacio normado. En cada caso, prueba lo indicado.

Notación El conjunto de valores propios de una matriz $A \in \mathcal{M}(n)$ se denotará por $\sigma(A)$.

1. Si $A \in \mathcal{M}(n)$, entonces $|\lambda| \le \|A\|_2$, $\forall\, \lambda \in \sigma(A)$.

Definición $e^{ix} := (\cos x, \operatorname{sen} x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

2. i) $e^{ix} \in S^1$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

ii) $e^{i(x+y)} = e^{ix}e^{iy}$, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$.

iii) Sea $x \in \mathbb{R}$. Entonces $e^{ix} = 1$ si, y sólo si, $x = 2n\pi$ para algún $n \in \mathbb{Z}$.

3. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Si su gráfica $G(f)$ es un conjunto cerrado y la función f es acotada, entonces f es continua.

Definición Para $x, y \in \ell^2$ definamos $\langle x, y\rangle := \sum_{n=1}^{\infty} x(n)y(n)$.

4. La función tiene las propiedades básicas del producto escalar en $\mathbb{R}^n$.

Definición Si V es un espacio vectorial que no es de dimensión finita, definimos $\dim V = \infty$.

5. Sea D un conjunto y $n \in \mathbb{N}$.

i) Si D tiene n elementos, entonces $\dim B(D) = n$.

ii) Si D es un conjunto infinito, entonces $\dim B(D) = \infty$.

Definición Denotaremos por c el espacio normado formado por las sucesiones reales que son convergentes, con la norma del supremo.

6. El espacio normado c es completo.

7. La función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = \max\{x, y\}$ es de Lipschitz.

8. Sean M y E espacios métricos no-vacíos. Si $f : M \to E$ es uniformemente continua, entonces f preserva sucesiones de Cauchy.

9. Si $\{x_k\} \subset X$ y $\{\lambda_k\} \subset \mathbb{R}$ son sucesiones convergentes, entonces se cumple que $\lim_{k\to\infty} \lambda_k x_k = \lim_{k\to\infty} \lambda_k \lim_{k\to\infty} x_k$.

10. Sea $\{x_n\} \subset X$. Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge, entonces $x_n \to 0$.

11. Las normas $\| \cdot \|_2$ y $\| \cdot \|_\infty$ no son equivalentes en $S_0 \subset \ell^2 \cap \ell^\infty$.

12. Sean $A, B \subset E$. Si A y B son conexos y $A \cap B \neq \phi$, entonces $A \cup B$ es conexo.

Para resolver y entregarse el jueves 6 de marzo, 2019.