ANÁLISIS II: TAREA 7

Cuando no se indique otra cosa, E es un espacio topológico y X un espacio normado. En cada caso, prueba lo indicado.

1. Sean M un espacio métrico completo, $\{f_n\} \subset C(E, M)$ y $a \in E$. Si $\{f_n\}$ es uniformemente de Cauchy, entonces para cada $\epsilon > 0$ existe un abierto $U \subset E$ tal que $a \in U$ y $d(f_n(a), f_n(x)) \leq \epsilon$, $\forall\, x \in U$ y $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

2. La desigualdad de Schwarz es válida en ℓ^2.

3. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$. Si A es no-numerable, entonces A^a es no-numerable.

4. Sean A y B subconjuntos cerrados de E. Si $A^0 = B^0 = \phi$, entonces $(A \cup B)^0) = \phi$. (Sug.: considera A^c y B^c.)

5. Si $A \subset \mathbb{R}^m$ y $B \subset \mathbb{R}^n$ son conexos, entonces $A \times B$ es conexo..

Definición Un espacio topológico M es *separable*, si tiene un subconjunto que es denso y numerable.

6. ℓ^∞ no es separable.

7. Dada una sucesión $s \in c$, definamos $\varphi(s) = \lim s$. Entonces $\varphi : c \to \mathbb{R}$ es lineal y continua.

8. Encuentra una función $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ que sea uniformemente continua y no sea de Lipschitz.

9. Sean X y Y espacios normados y $T : X \to Y$ un operador lineal. Entonces T es una isometría si, y sólo si, $\|Tx\| = \|x\|$, $\forall\, x \in X$.

10. Si $V \subset \mathbb{R}^n$ es un subespacio vectorial, entonces V es cerrado.

11. La relación $\sim$ definida entre normas en un espacio vectorial X es una relación de equivalencia.

12. Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua y $[a, b] \subset f([a, b])$, entonces f tiene un punto fijo. (Sug.: considera $A, B \in [a, b]$ tales que $f(A) = a, f(B) = b$ y procede como en el caso en que $f([a, b]) = [a, b]$.)

Para revisarse y entregar el miércoles 13 de marzo, 2019.