ANÁLISIS II: TAREA 8

Cuando no se indique otra cosa, E es un espacio topológico, y M un espacio métrico. En cada caso prueba lo indicado.

Por si tiene alguna dificultad, en la siguiente página les indiqué unas sugerencias respecto a los ejercicios marcados con asterisco.

Definición El espacio complejo $\mathbb{C}^n$ se define como en el caso de $\mathbb{R}^n$ sólo que las componentes de $(z_1, \ldots z_n)$ son ahora números complejos. En este caso $\mathbb{C}^n$ resulta ser un espacio vectorial sobre los complejos $\mathbb{C}$.

1. ¿Cómo definirías ahora el producto escalar en $\mathbb{C}^n$.

2*. Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto no-vacío y compacto, y definamos $F(x) := \max\{\langle x, a\rangle : a \in K\}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$. Entonces F es continua.

3. E es conexo si y sólo si, sus únicos subconjuntos que son cerrados y abiertos son el conjunto vacío y E .

4. $\mathbb{R}^n$ no se puede expresar como unión finita de subespacios vectoriales de dimensión menor que n.

Definición Sea M un espacio métrico. La *distancia de un punto $x \in M$ a un conjunto* $A \subset M$ es $\operatorname{dist}(x, A) := \inf\{d(x, y) : y \in A\}$.

5. Si $A \subset M$ es no-vacío, entonces

$$|\operatorname{dist}(x, A) - \operatorname{dist}(y, A)| \leq d(x, y),\ \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n.$$

6. Sea N otro espacio métrico. Si $j : M \to N$ es una isometría suprayectiva y N es completo, entonces M es completo.

7*. Sea $A \subset M$. Si X es un espacio de Banach y $f : A \to X$ es uniformemente continua, cómo puedes tratar de extender f a una función continua en $\overline{A}$.

8. Dada una sucesión $s \in c$ definamos $\varphi(s) = \lim s$. Entonces φ es lineal y continua.

9*. Encuentra una norma $\|\cdot\|$ en $\mathbb{R}^2$ para la cual no se cumpla que $|a| \leq \|ae_1 + be_2\|, \forall\, a, b \in \mathbb{R}$.

10. Fijemos $n \in \mathbb{N}$. Encuentra a y $b \in \mathbb{R}$ tales que $a\|A\|_{\text{op}} \leq \|A\|_2 \leq b\|A\|_{\text{op}}$, $\forall\, A \in \mathcal{M}(n)$.

11. Prueba que $\|A\|_{\text{op}} = \|A^t\|_{\text{op}},\ \forall\, A \in \mathcal{M}(m \times n)$.

12. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua y acotada, entonces f tiene un punto fijo.

Para revisar y entregarse el miércoles 20 de marzo, 2019.

SUGERENCIAS

2. Nota que para cada $x \in \mathbb{R}^n$ existe $a_x \in K$ tal que $F(x) = \langle x, a_x \rangle$.
7. Considera el ejercicio 6.8.
9. Considera el ejercicio 1.8.