

ANÁLISIS II: TAREA 9

Cuando no se indique otra cosa, $D \neq \emptyset$, E es un espacio topológico, y M un espacio métrico. En cada caso prueba lo indicado.

1. Sea $\{f_n\} \subset F(D, M)$ Si $f_n \xrightarrow{u} f$ y $h : A \rightarrow D$, entonces $f_n \circ h \xrightarrow{u} f \circ h$.

Definición Sea A un conjunto. Una función $f : M \rightarrow A$ es *localmente constante*, si para cada $x \in M$ existe $r > 0$ tal que f es constante en $V_r(x)$.

2. Sea $f : M \rightarrow E$ una función continua. Si f es localmente constante y M es conexo, entonces f es constante.

3. Para cualquier $x \in \mathbb{R}^n$, se cumple que $\|x\| = \sup\{|\langle x, y \rangle| : \|y\| \leq 1\}$.

4. Una función continua entre espacios métricos puede no preservar sucesiones de Cauchy.

5. Encuentra una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que sea discontinua y cuya gráfica sea un conjunto cerrado en $\mathbb{R}^2$.

6. El espacio ℓ^2 es separable.

7. El espacio normado c_0 es completo. (Sug.: Trata de usar el ejercicio 8.8.)

Definición Una matriz $A \in \mathcal{M}(n)$ es ortogonal, si $AA^t = A^tA = I$.

8. Si $A \in \mathcal{M}(n)$ es ortogonal, encuentra $\|A\|_{\text{op}}$.

9. $\lim \int_0^1 (1 - t^2)^n dt = 0$.

10. Si $f \in C([0, 1])$ y $f(0) = 0$, entonces existe una sucesión de polinomios $\{P_n\}$ tal que $P_n(0) = 0$ y $P_n \xrightarrow{u} f$.

11. Sean $A \subset \mathbb{R}^m$ y $B \subset \mathbb{R}^n$ conjuntos compactos. Dada una función continua $f : A \times B \rightarrow \mathbb{R}$, tomemos $\mathcal{F} = \{f_y : y \in B\}$, donde $f_y(x) = f(x, y)$, $\forall x \in A$. Entonces $\mathcal{F}$ es equicontinua.

Definición Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$. Dada $f = (f_1, \dots, f_n) \in C([a, b], \mathbb{R}^n)$, definimos $\int_a^b f := (\int_a^b f_1, \dots, \int_a^b f_n) \in \mathbb{R}^n$.

12. Para $f \in C([a, b])$ definamos $I(f) = \int_a^b f$. Entonces $I : C([a, b], \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un operador lineal.

Para revisar y entregarse el miércoles 27 de marzo, 2019.