ANÁLISIS II: TAREA 10

Cuando corresponda, prueba lo indicado. En cualquier caso, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, y X es un espacio normado.

1. Si A y D son conjuntos con igual cardinalidad, encuentra un isomorfismo isométrico entre $B(A)$ y $B(D)$.

2. Sea $s := \{a_n\} \in \ell^1$ y definamos $f_s(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx$. Entonces:
i) f_s está bien definida y es continua.
ii) El operador $T : \ell^1 \to C([-\pi, \pi])$ dado por $T(s) := f_s$ es lineal y acotado.

3. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ no-vacío y $x \in \mathbb{R}^n$. Si A es cerrado, entonces existe $a \in A$ tal que $\operatorname{dist}(x, A) = d(x, a)$.

4. El conjunto $GL(n)$ no es conexo.

5. Sea $A \in \mathcal{M}(n)$. i) La serie $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{A^m}{m!}$ converge.
ii) Definamos $e^A := \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A^m}{m!}$. Entonces $\|e^A\| \leq e^{\|A\|}$.

Definición Sea X un espacio normado. Una función $s : [a, b] \to X$ es *escalonada*, si existe una partición $\mathcal{P} := \{x_0, \ldots, x_n\}$ de $[a, b]$, tal que s es constante en cada subintervalo abierto $I_k = (x_{k-1}, x_k), k = 1, \ldots, n$.

6. Si $f : [a, b] \to X$ es continua, entonces existe una sucesión $\{s_n\}$ de funciones escalonadas, $s_n : [a, b] \to X$, tal que $s_n \xrightarrow{u} f$.

7. Sea $f_n(x) := x^n,\ 0 \leq x < 1,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$. Determina si $\{f_n\}$ es equicontinua.

8. (La separabilidad no basta para obtener la conclusión del teorema de Arzelá-Ascoli.) Dado $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n(x) = \frac{1}{n}x,\ \forall\, x \in \mathbb{R}$. Entonces $\mathbb{R}$ es separable, $\{f_n\}$ es puntualmente acotada, $\{f_n\}$ es equicontinua, y ninguna subsucesión de $\{f_n\}$ converge uniformemente.

9. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable tal que $|f'(x)| \leq K < 1$. Entonces, para cada $x \in \mathbb{R}$, la sucesión $\{f^n(x)\}$ es convergente.

10. Encuentra una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que no sea continua y que, para algún $k \in \mathbb{N}$, f^k sea una contracción.

Definición Sean X un espacio normado y $f : [a, b] \to X$. Entonces f es derivable en $t_0 \in [a, b]$, si existe $f'(t_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h} \in X$.

11. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, $f = (f_1, \ldots, f_n)$. Entonces f es derivable en $t_0 \in [a, b]$ si, y sólo si, cada f_j es derivable. En este caso $f'(t_0) = (f_1'(t_0), \ldots, f_n'(t_0))$.

12. Teorema fundamental del cálculo para $g \in C([a,b],\mathbb{R}^n)$:

i) La función $f(t)=\int_a^t g(s)ds, \forall\, t\in[a,b]$ es derivable y $f'(t)=g(t)$.

ii) Si $f \in C([a,b],\mathbb{R}^n)$ es derivable y $f'(t) = g(t), \forall\, t \in [a,b]$, entonces $\int_a^b g(s)ds = f(a)-f(b)$.

Para resolver y entregarse el miércoles 3 de abril, 2019.
El segundo examen parcial será el jueves 4 de abril, 3 pm.
No olviden traer sus hojas para el examen.