ANÁLISIS II: TAREA 11

Cuando no se indique otra cosa, M es un espacio métrico. En cada caso prueba lo indicado.

Por si tienen alguna dificultad, en la siguiente página les indiqué unas sugerencias respecto a los ejercicios marcados con asterisco.

1*. $GL(n)$ es denso en $\mathcal{M}(n)$.

2. (Teorema de Dini) Sea $\{f_n\} \subset C([0,1])$ tal que $f_{n+1} \leq f_n, \forall\, n \in \mathbb{N}$ y $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ es continua. Tomemos $g_n = f_n - f,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$.

i) Sea $\epsilon > 0$. Para cada $x \in [0,1]$, prueba que existe $N(x) \in \mathbb{N}$ y $r(x) > 0$ tal que si $y \in [0,1]$ y $y \in V_r(x)$, entonces $0 \leq g_{N(x)}(y) < \epsilon$

ii) Dado $\epsilon > 0$, prueba que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $0 \leq g_N(y) < \epsilon,\ \forall\, y \in [0,1]$.

iii) Concluye que $g_n \stackrel{u}{\to} 0$, esto es, $f_n \stackrel{u}{\to} f$.

3. Sea $\{f_n\} \subset C(M,\mathbb{R})$. Si $\{f_n\}$ es equicontinua y converge puntualmente a f, entonces f es uniformemente continua.

4. Señala una familia de funciones que sea equicontinua y no sea puntualmente acotada.

5. Considera en $\mathbb{R}$ la sucesión definida por $a_0 = \frac{3}{2},\ a_n = 1 + \frac{1}{a_{n-1}},\ n \in \mathbb{N}$. Prueba que $\{a_n\}$ converge y calcula su límite.

6. Encuentra una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $|f(x) - f(y)| < |x - y|$ si $x \neq y$, y que no tenga puntos fijos.

7. i) A partir de $f_0 = 1$, construye las dos primeras iteraciones de Picard para el problema $\frac{dx}{dt} = t^2 + x^2,\ \ x(0) = 1$.

ii) Prueba que la solución al problema anterior existe y es única en el intervalo $[-0.22, 0.22]$.

8. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$. Si f es continua, y $\frac{\partial f}{\partial x}$ existe y es acotada en $\mathbb{R}^2$, prueba que la solución del problema $\frac{dx}{dt} = f(t,x),\ x(t_0) = x_0$, está definida en $\mathbb{R}$. (Sug.: Considera la *prueba* del tma. de existencia y unicidad.)

9*. Sea $J \neq \phi$. Si $\{I_\alpha : \alpha \in J\}$ es una colección de intervalos, entonces $\cap_{\alpha\in J} I_\alpha$ es un intervalo.

10. Si A_k y B_k son conjuntos, $\forall\, k \in \{1, \dots, n\}$, entonces

$$(A_1 \times \cdots \times A_n) \cap (B_1 \times \cdots \times B_n) = (A_1 \cap B_1) \times \cdots \times (A_n \cap B_n).$$

Definición Para $f \in F(D)$ y $a \in \mathbb{R}^n$ definamos $f_a : a + D \to \mathbb{R}$ por $f_a(x) := f(x - a)$.

11. (Cambio de variable) Sea $R \in \mathcal{R}(\mathbb{R}^n)$.

i) $a + R \in \mathcal{R}(\mathbb{R}^n)$.

ii) Si $f \in \mathrm{Int}(R)$, entonces $f_a \in \mathrm{Int}(a + R)$ y $\int_{a+R} f_a = \int_R f$.

12. Si $f \in C([a, b])$, $f \geq 0$ y $\int_a^b f = 0$, entonces $f = 0$.

Para revisar y entregarse el miércoles 20 de marzo, 2019.

SUGERENCIAS

1. Dada $A \in \mathcal{M}(n)$ considera las matrices $A - \lambda I$.

2. Te presente que $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo si, y sólo si, I es convexo.