ANÁLISIS II: TAREA 13

Cuando corresponda, prueba lo indicado. En cualquier caso $R \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ y al considerar un intervalo $[a, b]$, entenderemos que $a, b \in \mathbb{R}$ y $a < b$.

1*. Dado $s \in [0, 1]$ buscamos $t = \sqrt[3]{s}$. Procediendo 'como' en el caso de raíces cuadradas, encuentra un problema de punto fijo que sea equivalente.

2. Sea Ω un conjunto.

i) Sean $A, B \subset \Omega$. Entonces $A \subset B$ si, y sólo si, $\chi_A \leq \chi_B$.

ii) Sean $k \in \mathbb{N}$ y $A_1, \ldots, A_k \subset \Omega$. Entonces $\chi_{\bigcup_{k=1}^K A_k} \leq \sum_{k=1}^K \chi_{A_k}$.

Definición Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es *periódica*, si existe $p > 0$ tal que $f(x + p) = f(x),\ \forall\, x \in \mathbb{R}$. En este caso, a p se le llama un *periodo* de f.

3. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función que es R-integrable en cualquier intervalo cerrado y acotado. Si f es periódica con periodo p prueba que la función g definida por $g(x) := \int_x^{x+p} f(s)ds,\ \forall\, x \in \mathbb{R}$, es constante.

4. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$. Si $m(A) = 0$, entonces $m(-A) = 0$.

5. $m(S^n) = 0$.

6. Un rectángulo R no tiene medida cero.

7. Motivado por la norma en ℓ^1 define una norma correspondiente en $C(R)$. Justifica tu respuesta.

8. Dada $f \in \mathrm{Int}([a, b])$, definamos $Vf(x) := \int_a^x f(t)dt,\ \forall\, x \in [a, b]$. Prueba que Vf es continua.

9. Si $f \in \mathrm{Int}(R),\ m \leq f(x) \leq M,\ \forall\, x \in R$, y $g : [m, M] \to \mathbb{R}$ es continua, entonces $g \circ f \in \mathrm{Int}(R)$.

10. Determina si $\mathrm{Int}(R)$, con la norma del supremo, es un espacio de Banach.

11. Sean E un espacio topológico y $A, B \subset E$. Entonces $\mathrm{Fr}(A \setminus B) \subset \mathrm{Fr}A \cup \mathrm{Fr}B$.

12. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$. Si $f'(t) = 0, \forall\, t \in [a, b]$, entonces f es constante.

Para revisar y entregarse el jueves 16 de mayo, 2019.

SUGERENCIAS

1. Considera un cambio de variable de la forma $x = 1 - at$, donde $a \in (0, 1)$.