ANÁLISIS II: TAREA 14

Prueba lo indicado. Donde corresponda, E es un espacio topológico, M un espacio métrico, $R \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ y al considerar un intervalo $[a,b]$, entenderemos que $a,b \in \mathbb{R}$ y $a < b$.

Recordemos que si $f : D \to B$ y $A \subset D$, entonces $f(A) := \{f(x) : x \in D\}$.

1. Sean $a > 0$, y $f : D \to \mathbb{R}$. Si existen $x, y \in D$ tales que $|f(x) - f(y)| > a$, entonces $\sup f(A) - \inf f(A) > a$.

2. Sea $f : M \to \mathbb{R}$ y $O : M \to \mathbb{R}$ su función oscilación. Entonces f es continua en $x \in M$ si, y sólo si, $O(x) > 0$.

3. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$. Encuentra los puntos $x \in \mathbb{R}^n$ donde $\chi_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es continua.

4. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$. Supongamos que para cada $\epsilon > 0$ existe una colección $\{R_k\}$ de rectángulos acotados tal que $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} R_k$ y $\sum_{k=1}^{\infty} m(R_k) \leq \epsilon$. Entonces A tiene medida cero.

5. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$. Si $m(A) = 0$, entonces $R \setminus A$ es denso en $R, \forall\, R \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

6. Sean $f, g \in \mathrm{Int}(R)$. Si $g \geq 0$ y f es continua, entonces existe $c \in R$ tal que $\int_R fg = f(c) \int_R g$.

7. Propón en $C[a,b]$ un "producto escalar "que corresponda al producto escalar en $\mathbb{R}^n$ y señala la correspondiente desigualdad de Schwarz.

8. Determina si $(C([0,1]), \|\cdot\|_1)$ es completo.

9*. Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es de clase C^1, entonces $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x) \mathrm{sen}\, nx dx = 0$.

Definición Dadas dos funciones $f, g : D \to \mathbb{R}$, definimos $f \vee g : D \to \mathbb{R}$, por $f \vee g(x) := \max\{f(x), g(x)\}$.

10. Si $f, g \in Int(R)$, entonces $f \vee g \in Int(R)$.

11. $\mathrm{Fr}(A \cap B) \subset \mathrm{Fr}A \cup \mathrm{Fr}B,\ \forall\, A, B \subset E$.

12. Sean $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto y $f : U \to \mathbb{R}$. Si $\frac{\partial f}{\partial x_k} = 0, \forall\, k \in \{1, \ldots, n\}$, entonces f es constante.

Para revisar y entregarse el jueves 23 de mayo, 2019.

SUGERENCIAS

9. Integra por partes.