ANÁLISIS II: TAREA 15

Donde corresponda, $R \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ y al considerar un intervalo $[a,b]$, entenderemos que $a, b \in \mathbb{R}$ y $a < b$. Además, al trabajar con $\mathrm{Int}(A)$ supondremos que $A \subset \mathbb{R}^n$ es no-vacío y acotado.

1. Si $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}$ es un intervalo y $m_n(A) = 0$, entonces $m_{n+1}(A \times B) = 0$.

2. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$. Si $n \geq 2$ y f es de Lipschitz, entonces $m(f([a,b])) = 0$.

3. Sean $f, g \in \mathrm{Int}(R)$. Si $f = g$ c.t.p., entonces $\int_R f = \int_R g$.

4*. (Lema de Riemann) Dada $f \in C[a,b]$ sea $a_n := \int_a^b f(x) \operatorname{sen} nx dx, \forall\, n \in \mathbb{N}$. Entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

5. Sea $f \in \mathrm{Int}(R)$. Si $f \geq 0$ y $\int_R f = 0$, entonces $f = 0$ c.t.p.

6. (Operador de Volterra) Denotemos por X_1 el espacio normado que se obtiene al considerar $C([0,1])$ con la norma $\|\cdot\|_1$. Dada $f \in C([0,1])$, definamos $Tf : [0,1] \to \mathbb{R}$ por $Tf(x) := \int_0^x f(s) ds$. Entonces $T : X_1 \to C([0,1])$ es un operador lineal acotado.

Notación Para cada $n \in \mathbb{N}$ denotaremos por $V(n)$ la medida de la bola $B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$.

7*. $V(n+2) = \frac{2\pi}{n+2} V(n), \ \forall\, n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, siendo $V(0) = 1$.

8. $\mathrm{Int}(A)$ es un espacio vectorial.

9. Si $m(A) = 0$ y $f \in \mathrm{Int}(A)$, entonces $\int_A f = 0$.

10. Sean $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto no-vacío y rectificable y $f : A \to \mathbb{R}$. Si $C \subset A$, C es rectificable y f es integrable en A, entonces f es integrable en C.

Para resolver y entregarse el jueves 30 de mayo, 2019.
El tercer examen parcial será el jueves 30 de mayo, 3 pm.
No olviden traer sus hojas para el examen.

SUGERENCIAS

4. Ten presente el teorema de aproximación de Weierstrass y un ejercicio de la tarea anterior.

7. Si $w \in \mathbb{R}^{n+2}$, expresa $w = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^n$ y ten presente el teorema de Fubini.