ANÁLISIS II: TAREA 1

Cuando corresponda, prueba lo indicado. En cualquier caso, M es un espacio métrico, Y un espacio normado e I un intervalo con interior no-vacío.

1. Sean A y B subconjuntos de M. Si A y B son conexos y $A \cap B \neq \phi$, entonces $A \cup B$ es conexo.

2. Sean $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ y $f : [a, b] \to [a, b]$. Si f es continua, entonces f tiene un punto fijo, esto es, existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = c$.

3. Sean $D \subseteq M,\ y \in D^a$ y $f, g : D \to Y$. Si $\lim_{x\to y} f(x)$ y $\lim_{x\to y} g(x)$ existen, entonces $\lim_{x\to y}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to y} f(x)+\lim_{x\to y} g(x)$ y $\lim_{x\to y}(\lambda f(x)) = \lambda \lim_{x\to y} f(x),\ \forall\, \lambda \in \mathbb{R}$.

4. Sean $D \subseteq M,\ y \in D^a$ y $f : D \to \mathbb{R}$. Establece un criterio para la existencia de $\lim_{x\to y} f(x)$ que corresponda al criterio de Cauchy para sucesiones. Justifica tu respuesta..

Definición Una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es *continua por pedazos*, si existe una partición $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ de $[a, b]$ respecto a la cual se cumplen las siguientes dos propiedades: a) f es continua en cada $x \in [a, b] \setminus P$. b) En cada punto $x = x_k,\ k = 0, \ldots, n$, existen los límites laterales.

5*. Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua por pedazos, entonces f es acotada.

Los siguientes conceptos para funciones corresponden a los que ya conocemos para sucesiones.

Definición Sea $D \subseteq \mathbb{R},\ f : D \to \mathbb{R}$ y $x, y \in D$. La función f es:
a) *Monótona-creciente*, si $x < y$ implica que $f(x) \leq f(y)$.
b) *Monótona-decreciente*, si $x < y$ implica que $f(x) \geq f(y)$.
c) *Monótona*, si f es monótona-creciente o monótona-decreciente.

6-7. Sean $a, b \in \mathbb{R}^*,\ a < b,\ f : (a, b) \to \mathbb{R}$ y $x \in I$. Si f es monótona-creciente, entonces:
i) $\sup\{f(y) : a < y < x\} \in \mathbb{R}$ e $\inf\{f(y) : p < y < x\} \in \mathbb{R}$.
ii) $f(x^-) = \sup\{f(y) : a < y < x\}$ y $f(x^+) = \inf\{f(y) : x < y < b\}$.
iii) ¿Qué pasa cuándo f es monótona-decreciente? (Sin demostración.)

8. Definamos $f(x) := \begin{cases} 2x + 1, & x \leq 0 \\ x^2 + bx + c, & 0 < x \end{cases}$. Encuentra b y $c \in \mathbb{R}$ para que f sea derivable.

9. Sean $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, $a<x<b$ y supongamos que f es derivable en x.
i) Si $f(x)\neq 0$, encuentra $|f|'(x)$.
ii) ¿Qué puede suceder si $f(x)=0$?

10. Si $f:I\to Y$ es derivable y su derivada es acotada, entonces f es uniformemente continua.

11. Encuentra un función $f:I\to\mathbb{R}$ que sea uniformemente continua y no sea derivable.

Definición Sean V y W espacios vectoriales. A una biyección $T:V\to W$ que sea lineal, la llamaremos *isomorfismo* (de V en W).
12. Sean V y W espacios vectoriales. Si $T:V\to W$ es un isomorfismo, entonces su función inversa $T^{-1}:W\to V$ es lineal.

Para entregarse el viernes 5 de febrero, 2021.

Sugerencias:

2*. Introduce una función auxiliar a la cual aplicar el teorema del valor intermedio. Para ello nota que $f(c) = c$ equivale a que las gráficas de f y de la identidad se intersecten.

5*. Trata de considerar subintervalos adecuados.