ANÁLISIS 2: TAREA 10

En donde corresponda E es un espacio topológico, X un espacio normado y al trabajar con $\operatorname{Int}(A)$ supondremos que $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es no-vacío y acotado.

1. Fijemos $a \in \mathbb{R}$ tal que $|a| < 1$ y definamos $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos nx,\ \forall\, x \in \mathbb{R}$. Prueba que la función f es de clase C^{∞}.

2. Sean $A \in \mathcal{M}(m\times n)$, $B \in \mathcal{M}(n\times k)$ y $x \in \mathbb{R}^n (= \mathcal{M}(n\times 1))$. Considerando en estos espacios la norma euclidiana, entonces:

i) $\|Ax\| \leq \|A\|\|x\|$.

ii) $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$.

iii) Si $n = m$ y $j \in \mathbb{N}$, entonces $\|A^j\| \leq \|A\|^j$.

3. $\operatorname{Fr}(A \cap B) \subseteq \operatorname{Fr}A \cup \operatorname{Fr}B,\ \forall\, A, B \subseteq E$.

4. Sean $v, w, x \in E$. Si existen curvas en E que unen a v con w y a w con x, respectivamente, construye una curva en E que una v con x.

5. Si $K \subseteq X$ es un conjunto convexo, entonces K es conexo.

6. Sea X un espacio normado. Si V es un subespacio vectorial de X y $V \neq X$, entonces $V^0 = \phi$.

7. Si $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y $m_n(A) = 0$, entonces $m_{n+1}(A\times\mathbb{R}) = 0$. Luego, en este caso, $m_{n+1}(A\times B) = 0,\ \forall\, B \subseteq \mathbb{R}$.

8. (Operador de Volterra) Denotemos por X_1 el espacio normado que se obtiene al considerar $C([0,1])$ con la norma $\|\cdot\|_1$. Dada $f \in C([0,1])$, definamos $Tf : [0,1] \to \mathbb{R}$ por $Tf(x) := \int_0^x f(s)ds$. Entonces $T : X_1 \to C([0,1])$ es un operador lineal acotado.

9. Sean $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto no-vacío y rectificable y $f : A \to \mathbb{R}$. Si $C \subseteq A$, C es rectificable y f es integrable en A, entonces f es integrable en C.

10. Sean $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ y definamos $T(x) = rx, \forall\, x \in \mathbb{R}^n$. Entonces T preserva conjuntos rectificables.

11. El producto de funciones $f : (0,1] \to \mathbb{R}$ que son impropiamente integrables puede no ser impropiamente integrable.

Notación Para cada $n \in \mathbb{N}$ denotaremos por $V(n)$ la medida de $B_1(0) \subseteq \mathbb{R}^n$.

12*. $V(n+2) = \frac{2\pi}{n+2}V(n),\ \forall\, n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, siendo $V(0) = 1$.

Para entregarse el jueves 22 de abril, 2021.

SUGERENCIAS

12*. Expresa $w \in \mathbb{R}^{n+2}$ como $w = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^n$ y ten presente el teorema de Fubini.