ANÁLISIS 2: TAREA 11

Al considerar un intervalo $[a, b]$, entenderemos que $a, b \in \mathbb{R}$ y $a < b$.

Definición Sea V un espacio vectorial. Una *combinación convexa* de los vectores, $v_1, \ldots, v_n \in V$ es una de la forma $t_1v_1 + \cdots + t_nv_n$, donde $t_1, \ldots, t_n \geq 0$ y $t_1 + \cdots + t_n = 1$.

1. Si $K \subseteq V$ es convexo y $v_1, \ldots, v_n \in K$, entonces cualquiera de sus combinaciones convexas también pertenece a K.

2. Si $A \subseteq \mathbb{R}^k$ y $B \subseteq \mathbb{R}^n$ son compactos, entonces $A \times B \subseteq \mathbb{R}^{k+n}$ es compacto.

3. Si U y W son abiertos y densos en un espacio topológico E, entonces $U \cap W$ también es abierto y denso.

4. Si $p > 1$ y $k \in \mathbb{N}$, entonces $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^k}{n^p} < \infty$.

5. Sea $X := (C([0, 1]), \|\cdot\|_1)$. Determina si el funcional evaluación $\varphi : X \to \mathbb{R}$ definido por $\varphi(f) := f(0)$ es continuo.

6. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$. Si $n \geq 2$ y f es de Lipschitz, entonces $m_n(f([a, b])\,) = 0$.

7. Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es monótona, entonces f es integrable.

8. Si $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es un homeomorfismo, entonces $\mathrm{Fr}h(A) = h(\mathrm{Fr}A), A \subseteq \mathbb{R}^n$.

9. (Véase ejercicio 10.12) i) Si $n = 2k$, donde $k \in \mathbb{N}$, entonces $V(n) = \dfrac{\pi^k}{k!}$.

ii) Si $n = 2k - 1$, donde $k \in \mathbb{N}$, entonces $V(n) = \dfrac{k!\, 2^{2k}\pi^{k-1}}{(2k)!}$.

10. Sean D y E conjuntos no-vacíos, $f_n : D \to M, n \in \mathbb{N}$ y $f : D \to M$. Si $f_n \xrightarrow{u} f$ en D y $h : E \to D$, entonces $f_n \circ h \xrightarrow{u} f \circ h$ en E.

11*.(Lema de Riemann) Dada $f \in C([a, b])$ sea $a_n := \int_a^b f(x) \operatorname{sen} nx dx, n \in \mathbb{N}$. Entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

12. (La conclusión del teorema de Arzelá-Ascoli no siempre es válida.)
Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n(x) = \frac{1}{n}x,\ \forall\, x \in \mathbb{R}$. Entonces $\mathbb{R}$ es separable, $\{f_n\}$ es puntualmente acotada, $\{f_n\}$ es equicontinua, y ninguna subsucesión de $\{f_n\}$ converge uniformemente.

Para entregarse el 30 de abril, 2021.
El segundo examen parcial será el viernes 30 de abril, 11 hrs.

SUGERENCIAS

6*. Considera $j \in \mathbb{N}$ y divide $[a, b]$ en j subintervalos de igual longitud. Si I es uno de esos subintervalos, prueba que $f(I)$ está contenido en un cuadrado de lado $\frac{k}{j}$, donde k es la constante de Lipschitz para f.

11*. Ten presente el teorema de aproximación de Weierstrass y un ejercicio de la tarea *.