ANÁLISIS 2: TAREA 12

Cuando corresponda, prueba lo indicado. En cualquier caso, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, y X es un espacio normado.

Definición Sea V un espacio vectorial y $K \subseteq V$ un conjunto convexo. Una función $f : K \to \mathbb{R}$ es *convexa*, si siempre que $a, b \in K$ y $t \in [0, 1]$ resulta $f((1-t)a + tb) \leq (1-t)f(a) + tf(b)$.

1. Sea $K \subseteq V$ un conjunto convexo. Si $f : K \to \mathbb{R}$ es una función convexa y $x_1, \ldots, x_n \in K$, entonces $f(t_1 x_1 + \cdots + t_n x_n) \leq t_1 f(x_1) + \cdots + t_n f(x_n)$ siempre que $t_1, \cdots t_n \geq 0$ y $t_1 + \cdots + t_n = 1$.

Definición La *gráfica* de una función $f : D \to B$ es

$$G(f) := \{(x, f(x)) : x \in D\} \subseteq D \times B.$$

2. Sean $D \subseteq \mathbb{R}^m$ y $f : D \to \mathbb{R}^n$. Si f es continua y D es cerrado, entonces su gráfica $G(f) \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$ es un conjunto cerrado.

3. Sea X un espacio normado. Entonces $\overline{V_r(x)} = B_r(x),\ \forall\, x \in X$ y $r > 0$.

4. La esfera $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ es arco-conexo.

5. Sea X un espacio normado. Si $\dim X < \infty$, entonces X es completo.

6. Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto acotado. Sean $f, g \in \mathrm{Int}(A)$. Si $f \leq g$, entonces $\int_A f \leq \int_A g$.

Notación El conjunto de valores propios de una matriz $A \in \mathcal{M}(n)$ se denotará por $\sigma(A)$.

7. Si $A \in \mathcal{M}(n)$, entonces $|\lambda| \leq \|A\|_{\mathrm{op}},\ \forall\, \lambda \in \sigma(A)$.

8*. Sea $f \in C([a, b])$. Si $\int_a^b f(x)x^n dx = 0,\ n = 0, 1, \ldots,$ entonces $f = 0$.

9. Sean $K_1 \subseteq \mathbb{R}^j,\ K_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ conjuntos compactos no-vacíos y A la colección de funciones $f : K_1 \times K_2 \to \mathbb{R}$, de la forma $f(x, y) = \sum_{j=1}^n f_j(x) g_j(y)$, donde $n \in \mathbb{N}$ y $f_j \in C(K_1), g_j \in C(K_2)$. Prueba que A es denso en $C(K_1 \times K_2)$.

10. Encuentra una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que no sea continua y que, para algún $k \in \mathbb{N}$, f^k sea una contracción.

11. Sea $f_n(x) := x^n,\ 0 \leq x < 1,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$. Determina si $\{f_n\}$ es equicontinua.

12. i) A partir de $f_0 = 1$, construye las dos primeras iteraciones de Picard para el problema $\frac{dx}{dt} = t^2 + x^2,\ \ x(0) = 1$.

ii) Prueba que la solución al problema anterior existe y es única en el intervalo [-0.22,0.22].

Para entregarse el viernes 7 de mayo, 2021.

SUGERENCIAS

1. Observa que la integral del producto de f con cualquier polinomio es 0 y utiliza el teorema de aproximación de Weierstrass para establecer que $\int_a^b f^2 = 0$.