ANÁLISIS II: TAREA 13

Cuando no se indique otra cosa, E es un espacio topológico, M es un espacio métrico y X un espacio normado. En cada caso prueba lo indicado.

1. Sean $K \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo y $f : K \to \mathbb{R}$. Entonces f es una función convexa si, y sólo si, $S := \{(x, y) : x \in K,\ f(x) \leq y\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ es un conjunto convexo.

Definición Sean M un espacio métrico, $x \in M$ y $A \subseteq M$. La *distancia* de x al conjunto A es $d(x, A) := \inf\{d(x, y) : y \in A\}$, siendo $\inf \phi = \infty$.

2. Si $A \subseteq M$ y $A \neq \phi$, entonces $|\text{dist}(x, A) - \text{dist}(y, A)| \leq d(x, y), x, y \in \mathbb{R}^n$.

3. (Teorema de Dini) Sea $\{f_n\} \subseteq C([0, 1])$ tal que $f_{n+1} \leq f_n, \forall\, n \in \mathbb{N}$ y $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ es continua. Tomemos $g_n = f_n - f,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$.

i) Sea $\epsilon > 0$. Para cada $x \in [0, 1]$, prueba que existe $N(x) \in \mathbb{N}$ y $r(x) > 0$ tal que si $y \in [0, 1]$ y $y \in V_r(x)$, entonces $0 \leq g_{N(x)}(y) < \epsilon$

ii) Dado $\epsilon > 0$, prueba que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $0 \leq g_N(y) < \epsilon,\ \forall\, y \in [0, 1]$.

iii) Concluye que $g_n \xrightarrow{u} 0$, esto es, $f_n \xrightarrow{u} f$.

4. El grupo $GL(n)$ no es conexo.

5. $A \subseteq E$ es abierto y cerrado si, y sólo si, $\text{Fr}A = \phi$.

6. Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ conjuntos rectificables. Si $f \in \text{Int}(A)$ y $B \subseteq A$, entonces $\int_A f = \int_B f + \int_{B\setminus A} f$.

Definición Sea X un espacio normado. Una función $s : [a, b] \to X$ es *escalonada*, si existe una partición $P := \{x_0, \ldots, x_n\}$ de $[a, b]$, tal que s es constante en cada subintervalo abierto $I_k = (x_{k-1}, x_k), k = 1, \ldots, n$.

7. Si $f : [a, b] \to X$ es continua, entonces existe una sucesión $\{s_n\}$ de funciones escalonadas, $s_n : [a, b] \to X$, tal que $s_n \xrightarrow{u} f$.

8. Encuentra una familia de funciones que sea equicontinua y no sea puntualmente acotada.

9. Considera en $\mathbb{R}$ la sucesión definida por $a_0 = \frac{3}{2},\ a_n = 1 + \frac{1}{a_{n-1}},\ n \in \mathbb{N}$. Prueba que $\{a_n\}$ converge y calcula su límite.

10. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$. Si f es continua, y $\frac{\partial f}{\partial x}$ existe y es acotada en $\mathbb{R}^2$, prueba que la solución del problema $\frac{dx}{dt} = f(t, x),\ x(t_0) = x_0$, está definida en $\mathbb{R}$. (Sug.: Considera la *prueba* del tma. de existencia y unicidad.)

11. Sean K un espacio métrico compacto y $F, F_n : K \to K, \forall\, n \in \mathbb{N}$. Supongamos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in K$ es un punto fijo de F_n. Si $F_n \xrightarrow{u} F$, entonces F tiene un punto fijo.

12*. Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto, $x \in U$ y $f : U \to \mathbb{R}^n$. Si f es derivable en x y $Df(x)$ es invertible, entonces existe $r > 0$ tal que $f(x+h) \neq f(x)$, $\|h\| \leq r$.

Para revisar y entregarse el viernes 14 de mayo, 2021.

SUGERENCIAS

12*. Prueba la contrapositiva: Supón que existe una sucesión $\{h_k\}$ tal que $h_k \neq 0, k \in \mathbb{N}, h_k \to 0$ y $f(x+h_k) = f(x), k \in \mathbb{N}$. Prueba que $Df(x)\left(\frac{h_k}{\|h_k\|}\right) \to 0$ y observa que $\left\{\frac{h_k}{\|h_k\|}\right\}$ tiene una subsucesión convergente.