ANÁLISIS II: TAREA 14

Cuando corresponda, prueba lo indicado. Con M siempre indicamos un espacio étrico y y al considerar un intervalo $[a, b]$, entenderemos que $a, b \in \mathbb{R}$ y $a < b$.

1. Sean V un espacio vectorial, $K \subseteq V$ un conjunto no-vacío, $f, f_n : K \to \mathbb{R}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Si K es convexo, cada f_n es convexa y $f_n \to f$, determina si f es convexa.

2. Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto no-vacío y $x \in \mathbb{R}^n$. Si A es cerrado, entonces existe $a \in A$ tal que $\operatorname{dist}(x, A) = d(x, a)$.

3*. $GL(n)$ es denso en $\mathcal{M}(n)$.

4. Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto no-vacío y rectificable. Si $f \in \operatorname{Int}(A)$ y $\int_A |f| = 0$, entonces $f = 0$ c.t.p.

5. Sea $\{f_n\} \subseteq C(M, \mathbb{R})$. Si $\{f_n\}$ es equicontinua y converge puntualmente a f, entonces f es uniformemente continua.

6. Sea $f : [a, b] \to [a, b]$ una función derivable tal que $|f'(x)| \le K < 1, \forall\, x \in [a, b]$. Entonces, para cada $x \in \mathbb{R}$, la sucesión $\{f^n(x)\}$ es convergente.

7. Encuentra una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $|f(x) - f(y)| < |x - y|$ si $x \neq y$, y que no tenga puntos fijos.

8. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^1, $t_0, x_0 \in \mathbb{R}$. Si f es acotada, prueba que la solución del problema $\frac{dx}{dt} = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$, existe en todo $\mathbb{R}$.

9. Sean $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo abierto no-vacío y $f : I \to \mathbb{R}$. Dado $w \in \mathbb{R}^n$, definamos $g : I \to \mathbb{R}^n$ por $g(t) = f(t)w$. Si f es derivable, entonces g es derivable y $g'(t) = f'(t)w$.

10. Verifica que $T(x, y, z) = (2x - 3z, y + 3x, -2z + x)$ define un operador lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ y encuentra su matriz asociada.

11. Dado $v \in \mathbb{R}^n$ definamos el funcional $\varphi_v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ por $\varphi_v(x) := \langle x, v \rangle$. Entonces φ_v es un funcional lineal y $\|\varphi\|_{\text{op}} = \|v\|$.

12. Encuentra $Df(p)$, para $f(x, y) = (x \cos y, y \operatorname{sen} x)$.

Para revisar y entregarse el viernes 23 de mayo, 2021.

SUGERENCIAS

1. Dada $A \in \mathcal{M}(n)$ considera las matrices $A - \lambda I$.