ANÁLISIS 2: TAREA 15

Cuando corresponda, prueba lo indicado.

1. Sea X un espacio normado. Si $V \subseteq X$ es un conjunto abierto, entonces V es conexo si, y sólo si, V es arco-conexo.

2. Definamos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $f(0) = 0$ y $f(t) = t^2 \operatorname{sen}(\frac{1}{t})$ si $t \neq 0$. Entonces:
i) f es derivable.
ii) f' no es continua en 0.

3. Si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es de clase C^2, entonces $\lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-2g(x)+g(x-h)}{h^2} = g''(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

4. Consideremos la función de coordenadas polares $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, esto es, $f(r, \theta) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)$. Bosqueja la imagen bajo f del conjunto $[1, 2]\times[0, \pi]$.

5. Sea I la matriz identidad en $\mathcal{M}(n)$ y $A \in \mathcal{M}(n)$. Si $\|I - A\|_{\mathrm{op}} < 1$, entonces $A \in GL(n)$.

6. (Cálculo de raíces cuadradas) Dado $s \in [0, 1]$, buscamos $t = \sqrt{s}$, esto es $t^2 = s$ y $t \in [0, 1]$. Como primer paso, hacemos los cambios de variables $x = 1 - t$ y $a = 1 - s$.
i) Verifica que la ecuación resultante es el problema de punto fijo $f(x) = x$, donde $f(x) := \frac{x^2+a}{2}$, $\forall\, x \in [0, 1]$.
ii*) Si $x_0 \in [0, 1]$, entonces $\{f^n(x_0)\}$ converge al punto fijo señalado en i).

Definición Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, $f : U \to \mathbb{R}^k$ y $p \in U$. Dado $u \in \mathbb{R}^n$, $u \neq 0$, definimos $Df(p; u) = \lim_{t\to 0} \frac{f(p+tu)-f(p)}{t} \in \mathbb{R}^k$, cuando este límite exista. En este caso llamaremos a $Df(p; u)$ *derivada direccional de f en p con respecto de u.*

7. Definamos $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ por $f(0) = 0$ y $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4+y^2}$ si $(x, y) \neq 0$. Entonces todas las derivadas direccionales de f existen en 0 y, sin embargo, f no es continua ahí.

8. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ una función tal que $f(0) = (1, 2)$ y $Df(0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Por otra parte, definamos $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ por $g(x, y) = (x + 2y + 1, 3xy)$. Encuentra $(g \circ f)'(0)$.

9. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la función dada por $f(x, y) = (x^2-y^2, 2xy)$, $\forall\, (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Encuentra Df y Jf. (Al identificar $\mathbb{C}$ con $\mathbb{R}^2$, la función anterior corresponde a la función $f(z) = z^2$.)

10. Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto no-vacío y $f : U \to \mathbb{R}^n$ de clase C^1. Si $Df(x)$ es invertible, $\forall\, x \in U$, entonces $f(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ es abierto.

Para revisar y entregarse el viernes 28 de mayo, 2021.

SUGERENCIAS

6. ii)*. Analiza si f es monótona.