ANÁLISIS 2: TAREA 16

Cuando corresponda, prueba lo indicado.

1*. Sean $f : U \to \mathbb{R}^k, u \in \mathbb{R}^n, u \neq 0$. Si f es derivable en p, entonces $Df(p\,; u) = Df(p)u$.

2. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = |xy|$. Entonces:

i) f es derivable en 0.

ii) Determina si f es derivable en alguna vecindad de 0.

3. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(0) = 0$ y $f(x, y) = \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$, si $(x, y) \neq 0$. Entonces f es de clase C^1 en $\mathbb{R}^2$.

4. Sean $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funciones derivables y definamos $F(x, y) := f(x, y, g(x, y))$. Encuentra las derivadas parciales de F en términos de las parciales de f y de g.

5. Considera la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida en el ejercicio 15.9. Entonces $Df(0, 1)$ es invertible y encuentra $Df(0, 1)^{-1}$.

6. Sea $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $g(x, y) = (2ye^{2x}, xe^y)$. Entonces existe un abierto alrededor de $(0, 1)$ que g lleva inyectivamente en un abierto alrededor de $(2, 0)$.

7. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definida por $f(x) = \|x\|^2 x$. Entonces:

i) f es de clase C^∞.

ii) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una biyección.

iii) Determina si $g = f^{-1}$ es derivable en 0.

8. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la *transformación de coordenadas esféricas*, definida por $f(\rho, \phi, \theta) = (\rho \cos\theta \operatorname{sen}\phi, \rho \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi, \rho\cos\phi)$.

i) Encuentra Df y Jf.

ii) Bosqueja la imagen bajo f del conjunto $A = [1, 2]\times[0, \frac{\pi}{2}]\times[0, \frac{\pi}{2}]$.

9. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ de clase C^1 y expresemos los puntos en $\mathbb{R}^3$ de la forma (x, y_1, y_2). Supongamos que $f(3, -1, 2) = 0$ y $f'(3, -1, 2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

i) Entonces existe un abierto $V \subseteq \mathbb{R}$ tal que $3 \in V$ y una función $g = (g_1, g_2) : V \to \mathbb{R}^2$ de clase C^1 tal que $g(3) = (-1, 2)$ y $f(x, g_1(x), g_2(x)) = 0$.

ii) Encuentra $Dg(3)$.

Para entregarse el viernes 4 junio, 2021.

SUGERENCIAS

1*. Trata de usar la regla de la cadena.