ANÁLISIS II: TAREA 2

Cuando corresponda, prueba lo indicado. El conjunto I siempre es un intervalo y Y es un espacio normado.

1*. Si $V \subseteq \mathbb{R}$ es abierto, entonces V se puede expresar como unión numerable de intervalos abiertos disjuntos.

2. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua y acotada, entonces f tiene un punto fijo.

3*. Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tales que $a < b,\ c < d$ y $h : [a, b] \to [c, d]$ una biyección. Si h es continua, entonces h es creciente o decreciente.

4. Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función monótona-creciente, entonces se cumple $f(w^+) \leq f(x^-) \leq f(x) \leq f(x^+)) \leq f(y^-)$, si $a < w < x < y < b$.

Definición Una función derivable $f : I \to Y$ es *de clase* C^1, si su derivada $f' : [a, b] \to Y$ es continua.

5. Si $f : [a, b] \to Y$ es una función de clase C^1, entonces f es de Lipschitz.

6. Sean $f : I \to \mathbb{R}^n, f = (f_1, \ldots, f_n)$. Entonces f es derivable en $x \in I$ si, y sólo si, cada función componente f_j lo es. Además, $f'(x) = (f_1'(x), \ldots, f_n'(x))$.

7. Sean $f : I \to \mathbb{R}$ y $x \in I$. Supongamos que $\{a_n\}, \{b_n\} \subseteq I$ son tales que $a_n < x < b_n,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$, y $\lim_{n\to\infty} a_n = x = \lim_{n\to\infty} b_n$. Si f es derivable en x, entonces $f'(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n}$.

8*. $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \dfrac{1}{(1-x)^2}, |x| < 1.$

9. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua. Si f es derivable en (a, b), $f' \geq 0$ en (a, b) y f tiene un número finito de puntos críticos, entonces f es creciente.

10. Sea $f : [a, b] \to Y$ una función continua tal que $f'(x)$ existe y satisface $\|f'(x)\| \leq c, \forall\, x \in (a, b)$. Prueba que $\|f(x) - f(y)\| \leq c|x - y|, \forall\, x, y \in [a, b]$.

11. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función derivable tal que $f' = f$ y $f(0) = 1$, entonces $f(x) = e^x,\ \forall\, x \in \mathbb{R}$. (Observemos que esto implica que la definición presentada para la exponencial coincide con la definición usual de Cálculo.)

Definición Sea V un espacio vectorial. Para cada $\lambda \in \mathbb{R}$ la *dilatación por* λ es la función $M_\lambda : V \to V$ definida por $M_\lambda(x) := \lambda x$.

12. Sea V un espacio vectorial. Si $\lambda \neq 0$, entonces $M_\lambda : V \to V$ es un isomorfismo.

Para entregarse el viernes 12 de febrero, 2021.

Sugerencias:

1*. Para cada $x \in V$, considera la unión de todos los intervalos J_x tales que $x \in J_x \subseteq V$.

3*. Dependiendo de la relación entre $h(a)$ y $h(b)$ establece que h es creciente o decreciente.

8*: $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \dfrac{1}{1-x},\ |x| < 1.$