ANÁLISIS II: TAREA 3

Cuando corresponda, prueba lo indicado. El conjunto M siempre es un espacio métrico.

1. Sea $A \subseteq M$. Si A es conexo y $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$, entonces B también es conexo.

2. Determina si existe $\displaystyle\lim_{(x,y)\to 0} \frac{y}{x}$.

Definición Sea τ la colección de subconjuntos $V \subseteq \mathbb{R}^*$ tales que:
a) Si $x \in \mathbb{R}$ y $x \in V$, entonces existe $r > 0$ tal que $V_r(x) \subseteq V$.
b) Si $-\infty \in V$, entonces existe $r > 0$ tal que $[-\infty, r) \subseteq V$.
c) Si $\infty \in V$, entonces existe $r > 0$ tal que $(r, \infty] \subseteq V$.

3. La colección τ es una topología en $\mathbb{R}^*$, a la cual llamaremos topología canónica o topología usual.

4. Sea $n \in \mathbb{N}$ y P el polinomio definido por $P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$, $x \in \mathbb{R}$. Si $a_0 a_n < 0$, entonces P tiene al menos una raíz real.

5. Sean $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ y $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Si f es derivable en (a, b) y existe $L = \lim_{x\to a^+} f'(x) \in \mathbb{R}$, entonces $L = f'(a)$.

6. Sea $-1 \leq s \leq 1$. Encuentra los valores máximo y mínimo de la función $f(t) = t^2 - 2st + 1$ en el intervalo $[-1, 1]$.

7*. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función derivable. Si $f'(a) < c < f'(b)$, entonces existe $x_0 \in (a, b)$ tal que $f'(x_0) = c$.

8*. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{P(x)}{e^{ax}} = 0$, para cualquier polinomio P y número real $a > 0$.

9*. Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones derivables tales que $f' = g,\ g' = -f$ y $f(0) = 1, g(0) = 0$. Entonces $f = \text{sen}$ y $g = \cos$.

10. Establece que $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ y $\text{sen}\, \frac{\pi}{2} = 1$.

11. i) $e^{pr} = (e^p)^r,\ \forall\, p, r \in \mathbb{R}$.
ii) Sea $p \in \mathbb{R}$. Entonces $(xy)^p = x^p y^p,\ \forall\, x, y > 0$.
iii) Sea $x > 0$. Entonces $x^{p+r} = x^p x^r,\ \forall\, p, r \in \mathbb{R}$.

12. Sean I y J intervalos, y $f : I \to J,\ g : J \to \mathbb{R}$. Si f y g son funciones convexas y g es monótona creciente, entonces $g \circ f$ es convexa.

Para entregarse el viernes 19 de febrero, 2021.

Sugerencias:

7*. Considera la función auxiliar $g(x) = f(x) - cx$ y analiza lo que sucede donde f toma su valor mínimo.

8*. Empieza con un polinomio de la forma $P(x) = x^k$.

9*. Considera la función $h(x) = (f(x) - \operatorname{sen} x)^2 + (g(x) - \cos x)^2, \ \forall\, x \in \mathbb{R}$. Nota que esto implica que la definición presentada para las funciones coseno y seno coincide con la definición usual de Cálculo.