ANÁLISIS II: TAREA 4

Cuando corresponda, prueba lo indicado. En cualquier caso I es un intervalo y M es un espacio métrico.

Definición Una *curva* en un espacio métrico M es una función continua $\alpha : [a,b] \to M$, donde $a, b \in \mathbb{R}$ y $a < b$. Su *trayectoria* es el conjunto $\alpha^* := \{\alpha(t) : a \leq t \leq b\}$.

1. La trayectoria de una curva en M es un conjunto compacto y conexo.

2. Sean $n \in \mathbb{N}$, $f, g : I \to \mathbb{R}$ y $x \in I$.

i) Si f y g son derivables n veces en $x \in I$, entonces el producto fg también lo es y se cumple la *fórmula de Leibniz*:

$$(fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x), \quad (f^{(0)} = f).$$

ii) Si $f, g \in C^{(n)}(I)$, entonces $fg \in C^n(I)$.

3. El polinomio $P(x) = x^3 - 6x - 40$ tiene una sola raíz positiva.

4. Calcula $\lim_{x \to 0} \dfrac{x - \operatorname{sen} x}{x^3}$.

5. Calcula $\lim_{x \to 0} \frac{x}{\ln(1+x)}$.

6. Para cada $x \in \mathbb{R}$ sea $f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} nx}{n^2}$. Entonces f es continua.

7. Sea $f_p(x) := x^p, \ x \geq 0$.

i) Determina para qué valores de $p > 0$ existe ${f_p}'(0)$.

ii) Determina para qué valores de $p > 0$ la función f_p es convexa.

8*. Sea $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$. Si $f(0) = 0$ y f es convexa, entonces se cumple que $f(a+b) \geq f(a) + f(b), \ \forall\, a, b \geq 0$.

9. Sean $n \in \mathbb{N}$ y $x_0 \in \mathbb{R}$. Dados $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, existe un único polinomio P de grado menor o igual que n tal que $P^{(k)}(x_0) = a_k, \ k = 0, 1, \ldots, n$.

10. Definamos $f(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$.

i*) Verifica que f es de clase C^∞.

ii) Determina si f se representa alrededor de 0 por su serie de Taylor.

11. Si A_k y B_k son conjuntos, $\forall\, k \in \{1, \ldots, n\}$, entonces

$$(A_1 \times \cdots \times A_n) \cap (B_1 \times \cdots \times B_n) = (A_1 \cap B_1) \times \cdots \times (A_n \cap B_n).$$

12*. i) Si I y J son intervalos, entonces $I \cap J$ es un intervalo.

ii) Si R y S son rectángulos en $\mathbb{R}^n$, entonces $R \cap S$ es un rectángulo en $\mathbb{R}^n$.

Para entregarse el viernes 26 de febrero, 2021.

SUGERENCIAS

8*. Dados $a, b \geq 0$ expresa a y b en la forma $t0 + s(a+b)$.

10-i)*. Observa que para $x > 0$, $f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}}$, donde P_n es un polinomio.

12*. Ten presente que $I \subseteq \mathbb{R}$ es un intervalo si, y sólo si, cuando $a, b \in I$ y $a < t < b$, entonces $t \in I$.