ANÁLISIS II: TAREA 5

Cuando corresponda, prueba lo indicado. En cualquier caso I es un intervalo y M un espacio métrico.

1. El conjunto de discontinuidades de una función monótona $f : I \to \mathbb{R}$ es numerable.

2. $\cos x > 0$ si $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ y $\cos x < 0$ si $\frac{\pi}{2} < x \leq \pi$.

3. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ...$, si $|x| < 1$.

4. $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$. (Observa que esto implica que $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$.)

5. i) Si $p \geq 1$, entonces $a^p + b^p \leq (a+b)^p, \ \forall\, a, b \geq 0$

ii) Encuentra una desigualdad "correspondiente" cuando $0 < p < 1$. (No es necesario probarla.)

6. Sea $p \in \mathbb{R}$. Entonces $(x+y)^p = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\begin{array}{c} p \\ k \end{array} \right) x^{p-k} y^k$, si $|y| < x$.

7. Sean $a > 0$ y $f : D \to \mathbb{R}$. Si existen $x, y \in D$ tales que $|f(x) - f(y)| > a$, entonces $\sup f(D) - \inf f(D) > a$.

Definición Un punto $x \in M$ es *punto frontera* de $A \subseteq M$, si para cada abierto V tal que $x \in V$, se cumple que $V \cap A \neq \phi$ y $V \cap A^c \neq \phi$. Al conjunto de estos puntos lo llamaremos *frontera* de A y se denotará por $\mathrm{Fr}A$.

8. Si $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y $B \subseteq \mathbb{R}^m$, entonces $\mathrm{Fr}(A \times B) = (\mathrm{Fr}A \times \overline{B}) \cup (\overline{A} \times \mathrm{Fr}B)$.

Definición Sean V un espacio vectorial y $a \in V$. *La traslación por* a es la función $T_a : V \to V$ tal que $T_a(x) := x + a$.

9. Para cada $a \in V$, la traslación $T_a : V \to V$ es una biyección.

10. (Cambio de variable) Sean $R \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ y denotemos simplemente como T la traslación por $a \in \mathbb{R}^n$. Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, entonces:

i) $T(R) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

ii) $f \circ T^{-1} \in \mathrm{Int}(T(R))$ y $\int_{T(R)} f \circ T^{-1} = \int_R f$.

11. Sea Ω un conjunto.

i) Sean $A, B \subseteq \Omega$. Entonces $A \subseteq B$ si, y sólo si, $\chi_A \leq \chi_B$.

ii) Sean $k \in \mathbb{N}$ y $A_1, \ldots, A_k \subseteq \Omega$. Entonces $\chi_{\bigcup_{k=1}^K A_k} \leq \sum_{k=1}^K \chi_{A_k}$.

12. Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Si $m(A) = 0$, entonces $m(-A) = 0$.

Para entregarse el viernes 5 de marzo, 2021.