ANÁLISIS II: TAREA 6

Cuando corresponda, prueba lo indicado. El conjunto M siempre es un espacio métrico.

Definición Un conjunto $A \subseteq M$ es *arco-conexo*, si para cualesquiera puntos $x, y \in M$ existe una curva $\alpha : [0, 1] \to M$ tal que $\alpha(0) = x$ y $\alpha(1) = y$.

1. Si $A \subseteq M$ es arco-conexo, entonces A es conexo.

2. Si $f : I \to \mathbb{R}$ es monótona y $f(I)$ es un intervalo, entonces f es continua.

3*. ¿Qué número es mayor: e^{π} o π^e?

4. Si $a \in \mathbb{R}$ y $\operatorname{sen} a = 0$, entonces $a = n\pi$ para algún $n \in \mathbb{Z}$.

5. Si $p > 0$ y $k \in \mathbb{N}$, entonces $\lim_{x \to o^+} x^p (\ln x)^k = 0$.

6. Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$. Si f y g son de clase C^n, entonces $g \circ f$ también lo es. Por lo tanto, si f y g son de clase C^{∞}, entonces $g \circ f$ también lo es.

7. i) Si $p \geq 1$, prueba que $(a + b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p), \ \forall\, a, b \geq 0$.
ii) Encuentra una desigualdad "correspondiente" cuando $0 < p < 1$. (No es necesario probarla.)

8*. Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo abierto y $g : I \to \mathbb{R}$ n-veces derivable en $x_0 \in I$. Si $g(x_0) = \ldots = g^{(n)}(x_0) = 0$, entonces $\lim_{h \to 0} \dfrac{g(x_0 + h)}{h^n} = 0$.

9. (Cambio de variable) Desarrolla lo indicado en el ejercicio 5.10 ahora con $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definida por $T(x) = -x$.

10. Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Si $m_n(A) = 0$, entonces $m_n(h + A) = 0, \forall\, h \in \mathbb{R}^n$.

11. Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Supongamos que para cada $\epsilon > 0$ existe una colección $\{R_k\}$ de rectángulos acotados tal que $A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} R_k$ y $\sum_{k=1}^{\infty} m(R_k) \leq \epsilon$. Entonces A tiene medida cero.

12. Si $f \in C([a, b]), \ f \geq 0$ y $\int_a^b f = 0$, entonces $f = 0$.

Para entregarse el viernes 12 de marzo, 2021.
El primer examen parcial será el viernes 12 de marzo, 11 hrs.

SUGERENCIAS

3*. Toma logaritmo y analiza la desigualdad mediante la función $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

10*. Analiza directamente el caso en que $n = 1$ y para $n \geq 2$ aproxima a g con el polinomio de Taylor $P_{x_0,n-2}$ y observa que, dado $\epsilon > 0$, se cumple $f^{(n-1)(x)} \leq \epsilon x$ para x suficientemente cerca de 0.