ANÁLISIS II: TAREA 7

Cuando corresponda, prueba lo indicado. En cualquier caso, M es un espacio métrico y $R \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

1*. Sea I un intervalo no-vacío. Si $f : I \to \mathbb{R}$ es continua e inyectiva, entonces $f^{-1} : f(I) \to I$ es continua.

2. i*) $\operatorname{sen}(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$.

ii*) $\pi > 3$.

3. i) Si $p \geq 1$ y $a_1, \ldots, a_n \geq 0$, entonces $\left(\sum_{j=1}^n a_j\right)^p \geq \sum_{j=1}^n a_j^p$.

ii) ¿ Qué forma toma la desigualdad anterior cuando $0 < p < 1$?

4. i) Desarrolla lo indicado en el ejercicio 5.10, siendo ahora $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ la dilatación definida por $T(x) := rx$, donde $r > 0$. En este caso la igualdad en ii) es $\int_{T(R)} f \circ T^{-1} = r^n \int_R f$.

Definición $S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$.

5. $m_{n+1}(S^n) = 0$.

6. Sea $f : M \to \mathbb{R}$ y $O : M \to \mathbb{R}$ su función oscilación. Entonces f es continua en $x \in M$ si, y sólo si, $O(x) = 0$.

7. Sea $A \subseteq M$. Encuentra los puntos $x \in M$ donde $\chi_A : M \to \mathbb{R}$ es continua.

Definición Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es *periódica*, si existe $p > 0$ tal que $f(x+p) = f(x),\ \forall\, x \in \mathbb{R}$. En este caso, a p se le llama *periodo* de f.

8. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función que es integrable en cualquier intervalo cerrado y acotado. Si f es periódica con periodo p, entonces la función g definida por $g(x) := \int_x^{x+p} f(s)ds,\ \forall\, x \in \mathbb{R}$, es constante.

9. Dada $f \in \operatorname{Int}([a,b])$, definamos $Vf(x) := \int_a^x f(t)dt,\ \forall\, x \in [a,b]$. Entonces Vf es continua.

10. Si $f \in \operatorname{Int}(R),\ m \leq f(x) \leq M,\ \forall\, x \in R$, y $g : [m, M] \to \mathbb{R}$ es continua, entonces $g \circ f \in \operatorname{Int}(R)$.

11. Determina si $\operatorname{Int}(R)$, con la norma del supremo, es un espacio de Banach.

12. Sean V y W espacios vectoriales. Si $S, T : V \to W$ son operadores lineales y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces $S + T$ y λT son operadores lineales.

Para entregarse el viernes 19 de marzo, 2021.

SUGERENCIAS

1*. Considera los ejercicios 2.3 y 6.2.

4.i*. $1 = \operatorname{sen}(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}) = \operatorname{sen}(\frac{\pi}{6})\cos(\frac{\pi}{3}) + \cos(\frac{\pi}{6})\operatorname{sen}(\frac{\pi}{3})$
$= \operatorname{sen}^2(\frac{\pi}{6}) + 2\cos^2(\frac{\pi}{6})\operatorname{sen}(\frac{\pi}{6}) = 1 - \cos^2(\frac{\pi}{6}) + 2\cos^2(\frac{\pi}{6})\operatorname{sen}(\frac{\pi}{6})$.

ii*). Observa que $\frac{\pi}{6} > \operatorname{sen}\frac{\pi}{6}$.