ANÁLISIS II: TAREA 8

Cuando corresponda, prueba lo indicado. En cualquier caso $R \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ y al considerar un intervalo $[a, b]$, entenderemos que $a, b \in \mathbb{R}$ y $a < b$.

1. La *esfera unitaria* en $\mathbb{R}^{n+1}$, $S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$, es compacto.

Definición Dadas dos funciones $f, g : D \to \mathbb{R}$, definimos $f \vee g : D \to \mathbb{R}$, por $f \vee g(x) := \max\{f(x), g(x)\}$.

2. Si $f, g \in Int(R)$, entonces $f \vee g \in Int(R)$.

3. Sean $A \subseteq \mathbb{R}^n, r > 0$ y $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definida por $Tx = rx$. Si $m(A) = 0$, entonces $m(T(A)) = 0$.

4*. Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es de clase C^1, entonces $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x) \operatorname{sen} nx dx = 0$.

Definición Dada una función $f : D \to [0, \infty)$, la región bajo su gráfica es $\rho_f := \{(x, y) : x \in D, 0 \leq y \leq f(x)\}$.

5. Si $f \in \text{Int}(R)$ y $f \geq 0$, entonces ρ_f es rectificable y $m_{n+1}(\rho_f) = \int_R f$.

6. Si $A \subseteq \mathbb{R}^n$, entonces $\text{Int}(A)$ es un espacio vectorial.

7. Si $m(A) = 0$ y $f \in \text{Int}(A)$, entonces $\int_A f = 0$.

8. Sean E un espacio topológico y $A, B \subseteq E$. Entonces $\text{Fr}(A \setminus B) \subseteq \text{Fr}A \cup \text{Fr}B$

Definición Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo no-vacío. Una función $f : I \to \mathbb{R}$ es *localmente integrable*, si f es integrable en cada intervalo compacto $J \subseteq I$.

9. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función acotada. Si f es localmente integrable en $(a, b]$, entonces $f \in \text{Int}([a, b])$ y $\int_a^b f = \lim_{c\to a} f$.

10*. Sean $a \in \mathbb{R}$ y $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ una función localmente integrable. Si $\int_a^\infty |f| < \infty$, entonces $\int_a^\infty f$ existe.

Definición Sea X un espacio vectorial. Dos normas en X, $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|_0$, son *equivalentes*, si existen $C,\ K > 0$ tales que $C\|x\|_0 \leq \|x\| \leq \|x\|_0,\ \forall\, x \in X$.

11. Determina si las normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ son normas equivalentes en $\mathbb{R}^n$.

12. Sea $V \neq \{0\}$ un espacio vectorial de dimensión finita y $\{v_1, \cdots, v_m\}$ una base suya. Dado $j = 1, \cdots, m$, definamos $\varphi_j(\sum_{k=1}^m a_k v_k) := a_j$. Observa que $\varphi_j : V \to \mathbb{R}$ está bien definida y verifica que es lineal.

Para entregarse el viernes 26 de marzo, 2021.

SUGERENCIAS

4*. Integra por partes.

10*. Procede como al probar que una serie que converge absolutamente, es convergente.