

## ANÁLISIS II: TAREA 9

Prueba lo indicado. Donde corresponda,  $E$  es un espacio topológico,  $R \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  y al considerar un intervalo  $[a, b]$ , entenderemos que  $a, b \in \mathbb{R}$  y  $a < b$ .

1. Cualquier rectángulo  $R \subseteq \mathbb{R}^n$  es convexo.
2. La función  $f$ , dada por  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen } nx}{n^3}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , tiene derivada continua.
3. Sean  $f, g \in \text{Int}(R)$ . Si  $g \geq 0$  y  $f$  es continua, entonces existe  $c \in R$  tal que  $\int_R fg = f(c) \int_R g$ .
4. Sea  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ . Si  $m_n(A) = 0$ , entonces  $R \setminus A$  es denso en  $R, \forall R \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ .
5. Motivado por la norma  $\|\cdot\|_1$  en  $\mathbb{R}^n$ , define una norma correspondiente en el espacio de funciones continuas  $C(R)$ . Justifica tu respuesta.
6. El conjunto de funciones  $f : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  que son impropriamente integrables es un espacio vectorial.
7.  $\overline{A} = A^0 \cup \text{Fr}A, \forall A \subseteq E$ .
- 8\*. La integral  $\int_1^{\infty} \frac{\text{sen } x}{x}$  existe.

**Notación** En adelante denotaremos por  $V(n)$  la medida de la bola  $B_{\mathbb{R}^n}$ .

9.  $m(B_r(0)) = r^n V(n)$ .

10. Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Define cuándo existe  $\int_{\mathbb{R}^2} f$ .

11. Sea  $K : [a, b]^2 \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua. Para  $f \in C([a, b])$  definamos la función  $Tf$  por  $Tf(x) := \int_a^b K(x, y)f(y)dy, \forall x \in [a, b]$ . Entonces:

i)  $Tf \in C([a, b])$ .

ii)  $T : C([a, b]) \rightarrow C([a, b])$  es un operador lineal acotado.

**Definición** Sea  $X$  un espacio vectorial. Una *seminorma* en  $X$  es una función  $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$  con las mismas propiedades de una norma, excepto que puede ocurrir que  $\|x\| = 0$  y  $x \neq 0$ .

12. Sean  $X$  un espacio vectorial,  $Y$  un espacio normado y  $T : X \rightarrow Y$  un operador lineal.

i) La función  $\|x\|_T := \|Tx\|_Y$  define una seminorma en  $X$ .

ii) ¿Cuándo es  $\|\cdot\|_T$  una norma?

Para revisar y entregarse el jueves 16 de abril, 2021.

## SUGERENCIAS

8\*. Integra por partes.