ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES: TAREA 1

Cuando corresponda, prueba lo indicado.

1. Si $U \subset \mathbb{R}^n$ y $V \subset \mathbb{R}^m$ son abiertos, entonces $U \times V \subset \mathbb{R}^{n+m}$ también lo es.

2. Si $A, B \subset \mathbb{R}^n$, entonces $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

3. Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y $u : U \to \mathbb{R}$. Si u tiene derivadas parciales continuas, entonces u es continua.

4. Encuentra $D^{(1,2,3)}u$, siendo $u(x,y,z) = x - 4xy + 5xyz - 2y^2z^2 + 3xy^3z^3$.

Definición Dado un multiíndice $\alpha := (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ definimos $\alpha! := \alpha_1!\alpha_2!\ldots\alpha_n!$ y $\begin{pmatrix} |\alpha| \\ \alpha \end{pmatrix} := \frac{|\alpha|!}{\alpha!}$.

5. La fórmula del binomio se puede expresar como

$$(x_1 + x_2)^k = \sum_{|\alpha|=k} \begin{pmatrix} |\alpha| \\ \alpha \end{pmatrix} x^\alpha, \; x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

6. Sean $U \subset \mathbb{R}^3$ un abierto, $u : U \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1 y definamos $h(s) := u(s, s^2, s^3), \; \forall\, s \in \mathbb{R}$. Calcula $h'(s)$.

7. Determina el orden de la ecuación de Kolmogorov, definida como $u_t - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}u_{x_ix_j} + \sum_{i=1}^n b_iu_{x_i} = 0$, y señala si es lineal.

8. Sean $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto no-vacío y $a > 0$. Si $h : U \times [0,a] \to \mathbb{R}$ es una función continua y definimos H por $H(x) := \int_0^a h(x,s)ds, \;\; \forall\, x \in U$, entonces H es continua.

9. El espacio formado por las soluciones clásicas de la ecuación de transporte en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ tiene dimensión infinita.

10. Encuentra la solución del problema

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t - u_x = 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^2 \\ u(t,t) = t^2, \quad t \in \mathbb{R} \end{array} \right. .$$

Para revisar y entregarse el martes 14 de agosto, 2018.