ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES: TAREA 2

Cuando corresponda, prueba lo indicado.

1. Si $A \subset \mathbb{R}^n$ y $B \subset \mathbb{R}^m$, entonces $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$. Concluye que si A y B son cerrados, entonces $A \times B$ también lo es.

2. Encuentra la cerradura de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$.

3. Si $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es de clase C^2 y $f(x, y, z) := u(x - y, 2x + 3z, y - 4z)$, calcula $\partial^{(1,1,0)} f$.

4. Prueba el teorema "trinomial":

$$(x_1 + x_2 + x_3)^k = \sum_{|\alpha|=k} \begin{pmatrix} |\alpha| \\ \alpha \end{pmatrix} x^\alpha, \quad x := (x_1, \ldots, x_n).$$

5. Determina una condición adicional para que la ecuación diferencial parcial

$$u_x - u_y = 0$$

tenga solución única en $\mathbb{R}^3 := \{(x, y, t)\}$. Justifica tu respuesta.

6. La solución del problema no-homogéneo con condiciones iniciales para la ecuación de transporte también se puede expresar como

$$u(x, t) := g(x - vt) + \int_0^t f(x - yv, -y + t) dy, \ \forall\, x \in \mathbb{R}^n, \ t \geq 0.$$

7. Encuentra la solución del problema

$$\left\{ \begin{array}{r} u_t - u_x + u_y = xy + t \quad \text{en } \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+, \\ u(x, y, 0) = \operatorname{sen} xy, \quad x, y \in \mathbb{R} \end{array} \right. .$$

8. Sea $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua y definamos $F(x, t) = \int_0^t f(x, s) ds$. Prueba que F es continua.

9. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a \leq b$ y $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ una función continua. Prueba que $\int_a^b v \cdot f(s)\, ds = v \cdot \int_a^c f(s)\, ds, \ \forall\, v \in \mathbb{R}^n$.

10. Sean $A \subset \mathbb{R}^n$ y $a > 0$ Si $h : A \times [0, a] \to$ es continua, entonces la función $\tilde{h} : A \times \mathbb{R}^+$ definida por

$$\tilde{h}(x, s) := \left\{ \begin{array}{ll} h(x, s), & 0 \leq s \leq a \\ h(x, a), & s > a \end{array} \right. ,$$

es una extensión continua de h.

Definición

a) Para $v, w \in \mathbb{R}^n$ sea $S(v, w) := \{v + t(w - v) : 0 \leq t \leq 1\}$. Notemos que, geométricamente, $S(v, w)$ es el segmento en $\mathbb{R}^n$ con v y w como extremos.

b) Un abierto $U \subset \mathbb{R}^3$ tiene la *propiedad* R si existen $b, c \in \mathbb{R}$ tales que para cualquier punto $(x, y, z) \in U$, se cumple que

$$S((x, y, z), (x, y, c)) \cup S((x, y, c), (x, b, c)) \subset U.$$

11. Si $p \in \mathbb{R}^3$ y $r > 0$, entonces $V_r(p)$ tiene la propiedad R.

Para revisar y entregarse el martes 21 de agosto, 2018