ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES: TAREA 3

Cuando corresponda, prueba lo seãlado. Si no se indica otra cosa, $U \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto no-vacío.

1. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$, $t_0 \in [a, b]$ y $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Si f es derivable en t_0 y $f'(t_0) \neq 0$, entonces existe $h > 0$ tal que si $|t - t_0| \leq h$ y $t \in [a, b]$, entonces $f(t) \neq f(t_0)$.

2. Para cada función $g \in C^1(\mathbb{R})$ hay una solución u de la ecuación diferencial parcial $u_t + tu_x = 0$ en $\mathbb{R}^2$ tal que $u(x, 0) = g(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

3. Sean $I \subset \mathbb{R}_+$ un intervalo abierto no-vacío, $h \in C(I \times \mathbb{R}^+)$, $f \in C(I)$, y H la función definida por definida por $H(t) := \int_0^{f(t)} h(t, s)ds$, $\forall\, t \in I$. Si $h_{x_1} \in C(I \times \mathbb{R}^+)$, $t_0 \in I$, k es derivable en t_0 y $f'(t_0) \neq 0$, entonces $H'(t_0) = \int_0^{f(t_0)} h_{x_1}(t, s)ds + f'(t_0)h(t_0, f(t_0))$.

4. Establece la fórmula de Leibniz: Si $u, v \in C^k(U)$ y α es un multiíndice de orden $k \in \mathbb{N}$, entonces $\partial^\alpha(uv) = \sum_{\beta \leq \alpha} \partial^\beta u\, \partial^{\alpha-\beta} v$.

5. Sea $U \subset \mathbb{R}^3$ un conjunto abierto no-vacío. Si $u \in C^2(U)$, calcula $\mathrm{rot}\nabla u$.

6. Si $F, G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ son campos de clase C^1, entonces
$$\nabla(F \cdot G) = F \cdot G + (G \cdot \nabla)F + F \times \mathrm{rot}G + G \times \mathrm{rot}F.$$

7. Si $F \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$, encuentra $H = (h_1, h_2, h_3) \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ tal que $\mathrm{rot}H = F$ y $h_2 = 0$.

8. Sean $p \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$ y $u : V_r(p) \to \mathbb{R}$. Si $\nabla u = 0$, entonces u es constante.

9. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$. Si los únicos subconjuntos de A que son cerrados y abiertos (en A) son ϕ y A, entonces A es conexo.

10. Si φ, $\psi : U \to \mathbb{R}$ son funciones continuas, entonces el conjunto $R = \{(x, y) : x \in U,\ \varphi(x) < y < \psi(x)\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ es abierto.

Para revisar y entregarse el lunes 27 de agosto, 2018