ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES: TAREA 4

Cuando corresponda, prueba lo señalado. Si no se indica otra cosa, $U \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto no-vacío.

1. Si $u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ y $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ son funciones de clase C^1 , entonces $\text{rot}(uF) = u \text{rot}F + \nabla u \times F$.

2. Si $U \subset \mathbb{R}^n$ es un abierto con la propiedad G , entonces G es conexo.

Notación En adelante usaremos la notación $S(n) := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$.

3. Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y $u : U \rightarrow \mathbb{R}$. Si $\nabla u = 0$ y U es conexo, entonces u es constante.

4. Sean U un abierto en $\mathbb{R}^2$ con la propiedad G , $f, h \in C^1(U)$ y considera en U la ecuación diferencial parcial $f u_t + h u_x = 0$. Si $f_t = -h_x$, entonces existe $v \in C^1(U)$ tal que para cualquier $g \in C^1(\mathbb{R})$, la función $u(x, t) = g(v(x, t))$ es solución de dicha ecuación.

Definición Sea $E \subset \mathbb{R}^n$. Dada una función $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ su *extensión canónica* es $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in E \\ 0, & x \in E^c \end{cases}$.

5. Sea $E \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto cerrado. Si $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ es continua y $f = 0$ en $\text{Fr} E$, entonces $\tilde{f}$ es continua.

6. Sean $x \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$. Entonces:

i) $B_r(x) = \overline{V_r(p)}$.

ii) $\text{Fr}(B_r(x)) = S_r(x)$

7. Sea $n \geq 2$. Entonces $m_n(\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}) = 0$.

8. Sean $R, S \subset \mathbb{R}^2$ rectángulos compactos. Si $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ es R -integrable y $S \subset R$, entonces f es R -integrable en S .

9. (Criterio de Cauchy) Sean $b > 0$ y $f : (0, b) \rightarrow \mathbb{R}$. Entonces $\lim_{r \rightarrow 0} f(r)$ existe si, y sólo si, para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $0 < r < s < \delta$, entonces $|f(r) - f(s)| \leq \epsilon$.

10. Si $A \subset \mathbb{R}^n$ y $B \subset \mathbb{R}^m$, entonces $\text{Fr}(A \times B) = (\text{Fr} A \times \overline{B}) \cup (\overline{A} \times \text{Fr} B)$.

Para revisar y entregarse el lunes 3 de septiembre, 2018