ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES: TAREA 5

Cuando corresponda, prueba lo senãlado. Si no se indica otra cosa, $U \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto no-vacío.

1. Sea $U \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto y $f : U \to \mathbb{C}$, $u := \operatorname{re} f, v := \operatorname{im} f$. Si f tiene derivada compleja en $a \in U$, entonces:

i) Las derivadas parciales $u_x(a), u_y(a), v_x(a)$ y $v_y(a)$ existen.

ii) Se cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$$u_x(a) = v_y(a), \quad u_y(a) = -v_x(a).$$

2. Sean $u, v \in \mathbb{R}^3$. Entonces:

i) $v \times u = -u \times v$.

ii) $(u \times v) \cdot v = 0 = (u \times v) \cdot v$.

iii) Si $\|u\| = \|v\| = 1$ y $u \cdot v = 0$, entonces $\|u \times v\| = 1$.

Definición Dados $h \in \mathbb{R}^n$ y $A \subset \mathbb{R}^n$, definamos $h + A := \{h + x : x \in A\}$.

3. Sean $A \subset \mathbb{R}^n$. Si $m(A) = 0$, entonces $m(h + A) = 0, \forall\, h \in \mathbb{R}^n$.

4. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ y $f : A \to \mathbb{R}^n$. Si el conjunto de discontinuidades de f tiene medida cero y A es admisible, entonces el conjunto de discontinuidades de su extensión canónica $\tilde{f}$ también tiene medida cero.

5. Si $A \subset \mathbb{R}^n$ es admisible, entonces su interior A^0 también es admisible y $\int_A f = \int_{A^0} f$, cuando $f : A \to \mathbb{R}$ es R-integrable.

6. $m(B_r) = r^n m(B_1)$, siendo $B_r = B_r(0)$, $\forall\, r > 0$.

7. Enuncia y prueba un resultado similar al del ejercicio 4.9 para analizar el $\lim_{r\to\infty} f(r)$ de una función $f : (a, \infty) \to \mathbb{R}$

Definición Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función continua. Diremos que f es absolutamente integrable (en $\mathbb{R}^n$), si existe $C > 0$ tal que $\int_{B_r(0)} |f| \leq C$, $\forall\, r > 0$.

8. Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es absolutamente integrable, entonces existe $\lim_{r\to\infty} \int_{B_r(0)} f$. En este caso definimos $\int_{\mathbb{R}^n} f := \lim_{r\to\infty} \int_{B_r(0)} f$.

9. Sea $A := ([0,1] \times \{0\}) \cup (\{1\} \times [0,1])$. Entonces:

i) A se puede parametrizar mediante una curva simple y regular por pedazos.

ii) A no se puede parametrizar mediante una curva regular.

10. i) Muestra que una curva regular puede no ser simple.

ii) Cualquier curva regular es simple por pedazos.

11. La región $R := \{x \in \mathbb{R}^2 : a < \|x\| < b\}$ es D-admisible.

Para revisar y entregarse el lunes 10 de septiembre, 2018.