ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES: TAREA 6

Cuando corresponda, prueba lo senãlado. Si no se indica otra cosa, $U \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto no-vacío.

1. Dada una matriz $n \times n$ $A = (a_{i,j})$ definamos el campo lineal $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ por $Tx = Ax$. Entonces $\mathrm{div} T = \mathrm{tr}\, A$, donde $\mathrm{tr}\, A$ es la traza de A.

Definición Sea A una matriz (real) $n \times n$.

a) A es *simétrica* si $A^t = A$.

b) A es *antisimétrica*, si $A^t = -A^t$.

2. Si A es una matriz $n \times n$, entonces A se puede expresar de forma única en la forma $A = B + C$, donde B es simétrica y C es antisimétrica. A B le llamaremos la *parte simétrica* de A y B es su parte antisimétrica.

3. Sean $f \in C^1(U), m > 0$ y consideremos la ecuación diferencial

$$mx''(t) = -\nabla f(x(t)), x(0) = x_0 \in U.,$$

Dada una solución x de esta ecuación diferencial definamos su *energía* por $E(t) = \frac{m}{2}(x'(t)^2) + f(x(t)$. Entonces $E(t) = E(0)$. (Por esto se dice que un campo gradiente es *conservativo*.)

4. Calcula el flujo del campo $F(x, y) := (2xy, y^2)$ a través de la la elipse cuya ecuación es $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1,\ a, b > 0$.

5. Dado $v = (r, \theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^3$ sean $\Psi_1(v) = r \cos \theta_1,\ \Psi_2(v) = r \mathrm{sen}\, \theta_1 \cos \theta_2$ y $\Psi_3(v) = r \mathrm{sen}\, \theta_1 \mathrm{sen}\, \theta_2$. Tomemos $\Psi = (\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3)$ y $R = \{(r, \theta_1, \theta_2) : r > 0, 0 < \theta_1 < \pi, -\pi < \theta_2 < \pi\}$ Entonces $\Psi : R \to \mathbb{R}^3$ es 1-1.

6. El determinante de la matriz jacobiana de Ψ es $D(r, \theta_1, \theta_2) = r^2 \mathrm{sen}\, \theta_1 \geq 0$.

7. Tomando $V_0 = 1$, resulta $V(n) = V(n-1) \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t dt,\ \forall n \in \mathbb{N}$. (Sug.: considera el teorema de Fubini.)

Definición Dados $A, B \subset \mathbb{R}^n$ definimos $A + B := \{x + y : x \in A, y \in B\}$.

8. Sean $K, C \subset \mathbb{R}^n$. Si K es compacto y C es cerrado, entonces $K + C$ es cerrado.

Definición Sea $u \in C^1(U)$. Dados $x \in U$ y $v \in S(n-1)$ la derivada de u en el punto x y respecto a la dirección v es $\dfrac{\partial u}{\partial v}(x) := \displaystyle\lim_{s \to 0} \frac{u(x + sv) - u(x)}{s}$.

9. Sean $u \in C^1(U)$ y $x \in U$. Entonces:

i) $\frac{\partial u}{\partial v}(x) = \nabla u(x) \cdot v, \ \forall\, v \in S^{n-1}$.

ii) Si $\nabla u(x) \neq 0$ y $h(v) := \frac{\partial u}{\partial v}(x), \ \forall\, v \in S^{n-1}$, entonces $h(v)$ es máximo cuando $v = \dfrac{\nabla u(x)}{\|\nabla u(x)\|}$.

Definición Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto. El *soporte* de una función $f : U \to \mathbb{C}$ es la cerradura (respecto a U) del conjunto $\{x \in U : f(x) \neq 0\}$ y se denotará por sop$f$. El conjunto $C_c(U)$ consiste de las funciones $f : U \to \mathbb{C}$ que son continuas y cuyo soporte es compacto.

10. El conjunto $C_c(U)$ es un espacio vectorial.

Para revisar y entregarse el lunes 17 de septiembre, 2018